

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE

DER MONATSHFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

J. RADON

WIEN

SCHRIFTFLEITUNG

N. HOFREITER

WIEN

57. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT

MIT 7 TEXTABBILDUNGEN

(AUSGEGEBEN IM JANUAR 1954)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1954

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20–25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

*an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität
Wien IX., Strudlhofgasse 4,*

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastel 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

57. Band/4. Heft

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Weitzenböck, R. Zum Transversalenproblem I.	265
Mautner, F. I. On Congruence Characters	307
Höfner, E. Zur Theorie der verallgemeinerten Pochhammerschen Differentialgleichung	317
Bukovics, E. Beiträge zur numerischen Integration II.	333
Buchbesprechungen	351

Zum Transversalenproblem.

Teil II: Zum 9-Ebenenproblem im R_5 .

Von

Roland Weitzenböck, Zelhem (Niederlande).

Mit 7 Abbildungen.

(Eingelangt am 31. März 1953.)

§ 1. Allgemeines.

Eine Ebene p^3 im projektiven R_5 ist analytisch gegeben durch $\binom{6}{3} = 20$ homogene Koordinaten $p_{ijk} = p'_{rst}$. Sind x, y und z drei nicht auf derselben Geraden liegende Punkte, so sind die dreireihigen Determinanten

$$p_{ijk} = (xyz)_{ijk}$$

die „Punktkoordinaten“ der Ebene p^3 ; dual sind

$$p'_{rst} = (u' v' w')_{rst}$$

die „Raumkoordinaten“ von p^3 , wobei diese Ebene als Schnitt der drei vierdimensionalen Räume u', v' und w' dargestellt erscheint. In $p_{ijk} = p'_{rst}$ bildet $ijk rst$ eine gerade Permutation von 123456.

Von den 20 Größen p_{ijk} sind nur 10 unabhängig, da es im $R_5 \infty^9$ Ebenen gibt. Die p_{ijk} sind verknüpft durch die sogenannten p -Relationen; dies sind quadratische Gleichungen, die zusammengefaßt werden können in

$$\sum_{ij} p_{ijk} p'_{ijs} = 0 \quad (k, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \quad (1)$$

Zerlegt man p_{ijk} und p'_{rst} in Komplexsymbole, so lauten diese Gleichungen

$$\frac{1}{2} (pq')^2 p_k q_s' = \frac{1}{2} (p_1 q_1' + p_2 q_2' + \dots + p_6 q_6')^2 p_k q_s' = \sum p_{ijk} q'_{ijs} = 0$$

und ergeben sich also aus dem identischen Verschwinden der Komitante

$$(pq')^2 (pu') (q' x) = \frac{1}{6} (p^3 q^2 x) (pu'). \quad (2)$$

Eine lineare Gleichung

$$\sum_{(ijk)} a'_{ijk} \pi_{ijk} = \frac{1}{36} (a^3 \pi^3) = \frac{1}{6} (a' \pi)^3 = 0 \quad (3)$$

zwischen den Koordinaten π_{ijk} einer veränderlichen Ebene π^3 stellt einen linearen Ebenenkomplex im R_5 dar; er enthält ∞^8 Ebenen. Sind die a_{ijk} selbst Ebenenkoordinaten, so nennt man den Komplex speziell, man sagt (3) ist die Gleichung der Ebene a^3 . Sie ist auf diese Weise dargestellt durch die ∞^8 Ebenen π^3 , von denen sie getroffen wird. Zwischen dem allgemeinen und dem speziellen Ebenenkomplex gibt es noch zwei projektiv-verschiedene Zwischenstufen¹.

Die allgemeine Formel (1) im Teil I gibt für $n = 5$ und $d = 2$ die Zahl $\tau_d = 42$, d. h. es gibt 42 Transversalebenen zu neun gegebenen Ebenen im R_5 . Ordnet man dem linearen Ebenenkomplex mit den Koeffizienten a_{ijk} den Punkt eines linearen Bildraumes $\mathfrak{R}_{19}$ mit den 20 homogenen Koordinaten a_{ijk} zu, so wird das Bild der ∞^9 Ebenen des R_5 die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_9^{42}$ von 9 Dimensionen und vom Grade 42. Sie wird von einem linearen $\mathfrak{R}_{10}$ allgemeiner Lage in 42 Punkten geschnitten. Nimmt man deshalb auf der $\mathfrak{M}_9^{42}$ 11 unabhängige Punkte an, die im $\mathfrak{R}_{19}$ einen $\mathfrak{R}_{10}$ bestimmen, so schneidet dieser $\mathfrak{R}_{10}$ die $\mathfrak{M}_9^{42}$ in weiteren 31 Punkten. Dies bedeutet im R_5 : zu 11 Ebenen (und im Allgemeinen nicht bei weniger als 11) gibt es in der linearen Schar $\lambda_1 1^3 + \lambda_2 2^3 + \dots + \lambda_{11} 11^3$ noch weitere 31 Ebenen, die zu den 11 gegebenen assoziiert sind.

Das „9-Ebenenproblem“ ist die Ermittlung der 42 Transversalebenen zu 9 gegebenen Ebenen allgemeiner Lage, d. h. also die Zurückführung auf algebraische Gleichungen und deren konstruktive Deutung in der projektiven Geometrie. Für die dazu notwendigen Rechnungen gebe ich im Folgenden einen Ansatz, der an sich schon zu interessanten Figuren führt, ohne eine abschließende Konstruktion zu liefern.

Die Zahl 42 findet sich schon 1886 bei *H. Schubert*² und auf Grund einer algebraischen Abzählung 1889 bei *O. Landsberg*³.

§ 2. Die Invarianten B, C, D und E .

Wir bezeichnen die 9 gegebenen Ebenen mit $1^3, 2^3, \dots, 9^3$ und nennen

$$J_{rs} = (r^3 s^3) = 36 \sum r_{ijk} s_{lmn} = -J_{sr} \quad (4)$$

die bilineare Invariante der beiden Ebenen r^3 und s^3 ; $J_{rs} = 0$ ist dann die

¹ Bezüglich linearer Ebenenkomplexe im R_5 vgl.: *O. Landsberg*, Diss. Breslau (1889); *W. Reichel*, Diss. Greifswald (1907); *R. Weitzenböck*, Komplex-Symbolik, Leipzig (1908); *E. Veneroni*, Rend. di Palermo 26 (1908); *C. Segre*, Ann. di Mat. 27 (1918); *R. Weitzenböck*, Proceed. Amsterdam 32 (1929), p. 248–250 und Monatshefte Math. u. Phys. 48 (1939), p. 129–140.

² Acta mathem. 8.

³ l. c.

Bedingung dafür, daß die Ebenen r^3 und s^3 wenigstens einen Punkt gemein haben.

Nun sei A ein Punkt in der Ebene 1^3 . Wir verbinden ihn mit der Ebene s^3 . Dies gibt den dreidimensionalen Raum ($s^3 A$) und dieser R_3 schneidet die Ebene r^3 in einem Punkte R_s mit der Gleichung

$$(u' R_s) = (u' r) (r^2 s^3 A) = 0. \quad (5)$$

Bringt man hier die Reihe r von $(u' r)$ in den Klammerfaktor, so entsteht

$$(u' r) (r^2 s^3 A) = (u' s) (s^2 r^3 A) - \frac{1}{3} (r^3 s^3) \cdot (u' A), \text{ d. h.}$$

$$R_s = S_r - \frac{1}{3} J_{rs} \cdot A, \quad (6)$$

was ausdrückt, daß die drei Punkte R_s , S_r und A auf einer Geraden liegen, nämlich auf der durch A gehenden Geraden, die die Ebenen r^3 und s^3 trifft. Die Punkte R_s existieren bei allgemeiner Lage der Ebenen immer und $R_s \neq S_r$, da sonst $J_{rs} = 0$ wäre, d. h. die Ebenen r^3 und s^3 würden sich schneiden.

Bei den Ebenen 2^3 , 3^3 , 4^3 und 5^3 gibt dies das folgende Schema von Punkten (vgl. Abb. 1):

$$\left\{ \begin{array}{cccc} * & C_2 = 3 (3^2 2^3 A) & D_2 = 4 (4^2 2^3 A) & E_2 = 5 (5^2 2^3 A) \\ B_3 = 2 (2^3 3^3 A) & * & D_3 = 4 (4^2 3^3 A) & E_3 = 5 (5^2 3^3 A) \\ B_4 = 2 (2^2 4^3 A) & C_4 = 3 (3^2 4^3 A) & * & E_4 = 5 (5^2 4^3 A) \\ B_5 = 2 (2^2 5^3 A) & C_5 = 3 (3^2 5^3 A) & D_5 = 4 (4^2 5^3 A) & * \end{array} \right\}$$

Zufolge (6) kann man in einem Klammerfaktor der A enthält, R_s durch S_r ersetzen und umgekehrt. Es ist also z. B.

$$\begin{aligned} (C_4 C_5 2^3 A) &= \\ (D_3 C_5 2^3 A) &= \\ (D_3 E_3 2^3 A) \text{ usw.} \end{aligned} \quad (7)$$

Die Ebene der drei Punkte B_3, B_4 u. B_5 muß mit 2^3 identisch sein, d. h. die beiden Komitanten $(B_3 B_4 B_5 \pi^3)$ und $(2^3 \pi^3)$ müssen sich nur durch einen Faktor unterscheiden. Wir haben, wenn $\bar{2}$ und $\ddot{2}$ mit 2 äquivalent sind:

$$(B_3 B_4 B_5 \pi^3) = (\ddot{2} \ddot{2} \ddot{2} \pi^3) (\dot{2}^2 3^3 A) (\dot{2}^2 4^3 A) (\ddot{2}^2 5^3 A),$$

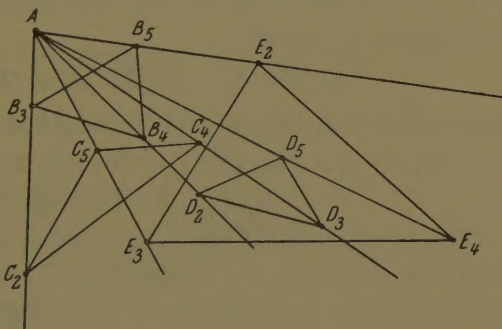


Abb. 1.

und bringen wir hier die zwei Symbolreihen 2 des zweiten Klammerfaktors in den ersten, so entsteht

$$(B_3 B_4 B_5 \pi^3) = \frac{1}{3} B \cdot (2^3 \pi^3), \quad (8)$$

wobei

$$B = (\ddot{2}2\ddot{3}^3 A) (\ddot{2}^2 4^3 A) (\ddot{2}^2 5^3 A) = (B_4 B_5 3^3 A) = (B_5 B_3 4^3 A) = \\ = (B_3 B_4 5^3 A) = B_{345} \quad (9)$$

eine Invariante ist, die die Reihe A im dritten Grade enthält und deren Verschwinden ausdrückt, daß die drei Punkte B_3 , B_4 und B_5 auf einer Geraden liegen. Man zeigt leicht, daß diese Größen B_{ijk} ($i, j, k = 2, 3, \dots$) in den Indices i, j, k alternieren und überdies die p -Relationen erfüllen, d. h. es ist

$$B_{345} B_{678} = B_{645} B_{378} - B_{635} B_{478} + B_{634} B_{578}. \quad (10)$$

Neben dieser Invariante B verwenden wir die analog gebauten:

$$\begin{cases} C = C_{245} = (C_4 C_5 2^3 A) = (C_5 C_2 4^3 A) = (C_2 C_4 5^3 A) \\ D = D_{253} = (D_5 D_3 2^3 A) = (D_3 D_2 5^3 A) = (D_2 D_5 3^3 A). \\ E = E_{234} = (E_3 E_4 2^3 A) = (E_4 E_2 3^3 A) = (E_2 E_3 4^3 A) \end{cases} \quad (11)$$

Diese Komitanten B , C , D und E sind, wie man leicht nachrechnet, verbunden durch die identisch in den X_i geltenden Gleichungen

$$C (D_5 X^2 A) + D (E_3 X^2 A) + E (C_4 X^2 A) \equiv 0 \quad (12a)$$

$$\begin{cases} B \cdot (D_5 X^3 A) \equiv * & D (B_5 X^3 A) + E (B_4 X^3 A) \\ B \cdot (E_3 X^4 A) \equiv C (B_5 X^4 A) & * + E (B_3 X^4 A) \\ B \cdot (C_4 X^5 A) \equiv C (B_4 X^5 A) + D (B_3 X^5 A) & * \end{cases} \quad (12b)$$

Überdies haben wir

$$(C_4 X^5 A) + (D_5 X^3 A) + (E_3 X^4 A) \equiv 0. \quad (12c)$$

Kombiniert man diese letzte Gleichung mit (12b), so folgt:

$$C \cdot [(B_4 X^5 A) + (B_5 X^4 A)] + D \cdot [(B_5 X^3 A) + (B_3 X^5 A)] + \\ + E \cdot [(B_3 X^4 A) + (B_4 X^3 A)] \equiv 0. \quad (13)$$

Die Identitäten (12a) und (12b) gehen bei Permutation von 2, 3, 4 und 5 in sich über. Die Gleichung (12c) ebenfalls, wenn C , D und E (oder 3, 4, und 5) permutiert werden. Vertauscht man dagegen 2 mit 3, 4 und 5, so entstehen aus (12c) die Gleichungen

$$\begin{cases} (D_5 X^2 A) + * + (B_5 X^4 A) + (B_4 X^5 A) \equiv 0 \\ (E_3 X^2 A) + (B_5 X^3 A) + * + (B_3 X^5 A) \equiv 0. \\ (C_4 X^2 A) + (B_4 X^3 A) + (B_3 X^4 A) * \equiv 0 \end{cases} \quad (14)$$

Die Identität (12c) drückt aus, daß die drei vierdimensionalen Räume

$$(C_4 X^5 A) = 0, (D_5 X^3 A) = 0 \text{ und } (E_3 X^4 A) = 0$$

sich nicht längs einer Ebene schneiden, sondern einen R_3 , nämlich den $R_3(AC_4 D_5 E_3)$ gemein haben. Analog bei den Gleichungen (14). Die lineare Kombination

$$C \cdot (14)_1 + D \cdot (14)_2 + E \cdot (14)_3$$

gibt wieder (13).

§ 3. Kurven dritter Ordnung in der Ebene 1^3 .

Bisher haben wir den Punkt A festgehalten. Nehmen wir A in 1^3 veränderlich, so stellen die Gleichungen $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ und $E = 0$ vier Kurven dritter Ordnung in der Ebene 1^3 dar. Über deren Schnittpunkte stellen wir Folgendes fest.

Wenn $C = D = 0$ ist, so folgt aus (12a): $E \cdot (C_4 X^2 A) \equiv 0$, d. h. es ist entweder auch $E = 0$ oder $(C_4 X^2 A)$ verschwindet für alle X_i . Im letzteren Falle liegt der Punkt C_4 im Raume $(2^3 A)$, d. h. er fällt mit C_2 zusammen: $C_4 = C_2$. Aus (12b)₃ folgt weiters für $C = D = 0$:

$$B \cdot (C_4 X^5 A) \equiv 0,$$

d. h. es ist entweder $B = 0$ oder $C_4 = C_5$. Zusammenfassend haben wir also bei $C = D = 0$ die folgenden vier Möglichkeiten:

- $(\alpha_{11}) \quad B = C = D = E = 0$
- $(\alpha_{12}) \quad B \neq 0, C = D = E = 0; \quad C_5 = C_4$
- $(\alpha_{21}) \quad B = 0, C = D = 0; E \neq 0; C_2 = C_4$
- $(\alpha_{22}) \quad B \neq 0, C = D = 0; E \neq 0; C_2 = C_4 = C_5.$

Der letzte Fall (α_{22}) ist nicht möglich. Gleichung (12b)₂ gibt dann nämlich

$$B \cdot (E_3 X^4 A) \equiv E \cdot (B_3 X^4 A) \text{ oder } B \cdot (C_5 X^4 A) \equiv E \cdot (B_3 X^4 A);$$

wegen $C_5 = C_4$ steht hier linker Hand Null, also ist auch $(B_3 X^4 A) \equiv 0$, d. h. $B_3 = B_4$, was aber $B = 0$ gibt.

(α_{12}) und (α_{21}) sind von gleichem Typus (eine der vier Invarianten B, C, D, E ist nicht Null). Wir führen (α_{12})

weiterhin an als Fall (α) und haben also:

$$\text{Fall } (\alpha): B \neq 0, C = D = E = 0 \text{ mit } C_4 = C_5, D_3 = D_5, E_3 = E_4. \quad (15)$$

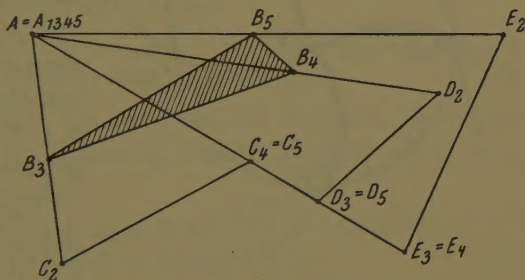


Abb. 2.

Die beiden letzten Gleichungen ergeben sich aus (12b).

Fall (β): $B = C = D = E = 0$; (16)

hier liegen B_3, B_4, B_5 auf einer Geraden β

C_2, C_4, C_5 auf einer Geraden γ

D_3, D_2, D_5 auf einer Geraden δ

E_2, E_3, E_4 auf einer Geraden η .

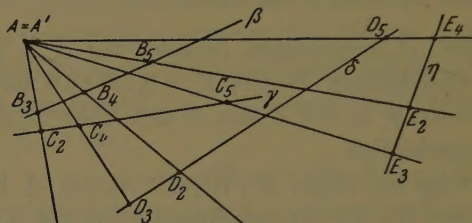


Abb. 3.

In beiden Fällen (α) und (β) gibt es in der Ebene 1^3 drei Punkte mit diesen Figuren. Es beruht dies auf dem Satze: *es gibt im R_5 drei Geraden, die vier gegebene Ebenen schneiden*. Wir haben nämlich:

Fall (α). Es sei $A = A_{1345}$

einer der drei Punkte in der Ebene 1^3 , durch die eine Gerade $A_{1345}C_4D_3E_3$ geht, die $1^3, 3^3, 4^3$ und 5^3 schneidet. Dann sind

$$C_4 = C_5, D_3 = D_5 \text{ und } E_3 = E_4$$

die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Ebenen $3^3, 4^3$ und 5^3 . Es gibt also drei Punkte A_{1345} , in denen $C = D = E = 0, B \neq 0$ ist. Ebenso gibt es drei Punkte A_{1245} , drei Punkte A_{1235} und drei Punkte A_{1234} .

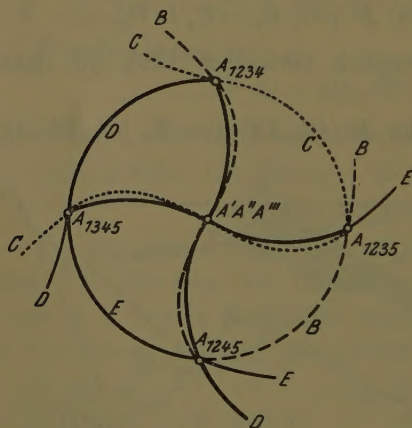


Abb. 4.

Fall (β). Es gibt drei Räume R_3 , die die vier Ebenen $2^3, 3^3, 4^3$ und 5^3 nach Geraden β, γ, δ und η schneiden. Ein solcher R_3 trifft 1^3 in einem Punkte $A = A'$. Man erhält somit drei Punkte A', A'' und A''' in 1^3 für den Fall (β) denn es ist leicht aus der Abb. 3 zu entnehmen, daß die vier Geraden β, γ, δ und η demselben R_3 angehören.

Für die Schnittpunkte der Kurven dritter Ordnung $B = 0, C = 0, D = 0$ und $E = 0$ in der Ebene 1^3 ergibt sich also die

schematische Abb. 4, worin die gezeichneten Schnittpunkte A', A_{1ijk} je drei Schnittpunkte der durch sie gehenden Kurven vorstellen. Alle

vier Kurven haben die drei Punkte A' , A'' und A''' gemein; A_{1345} stellt drei Punkte in 1^3 dar, die den drei Kurven $C = 0$, $D = 0$ und $E = 0$ gemeinsam sind etc.

§ 4. Die T_{12345} durch AB .

Wir halten vorläufig die Punkte A und B fest. Es gibt dann durch AB eine Transversalebene T_{12345} , die die Ebenen 3^3 , 4^3 und 5^3 trifft. Man erhält sie als Schnitt der drei R_4 .

$$(AB3^3X) = 0, (AB4^3X) = 0, (AB5^3X) = 0 \quad (17)$$

und sie hat daher die Gleichung

$$K_{345\pi}(AB) = (AB3^3\pi)(AB4^3\pi)(AB5^3\pi) = 0. \quad (18)$$

Wir halten nun den Punkt A in der Ebene 1^3 fest und fragen: wie muß B in 2^3 liegen, damit diese Ebene T_{12345} unbestimmt wird? Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß entweder einer der drei Räume R_4 von (17) unbestimmt wird, daß also z. B.

$$(AB3^3X) \equiv 0 \text{ ist für alle } X_i,$$

oder daß diese drei R_4 sich in einem R_3 schneiden, d. h. daß die drei Komitanten (17) linear abhängig werden.

Im ersten Falle, bei $(AB3^3X) \equiv 0$ folgt $B = B_3$, so daß also diese erste Möglichkeit die drei Punkte B_3 , B_4 und B_5 als Ausnahmepunkte ergibt.

Im zweiten Falle setzen wir zuerst $B \neq 0$ voraus, so daß also die drei Punkte B_3 , B_4 und B_5 nicht auf einer Geraden liegen und ein willkürlicher Punkt der Ebene 2^3 in der Gestalt

$$B = \mu_3 B_3 + \mu_4 B_4 + \mu_5 B_5$$

dargestellt werden kann. Setzt man dies in (17) ein, dann drückt sich die lineare Abhängigkeit dieser drei R_4 so aus:

$$\lambda_3 [\mu_4 (AB_4^3X) + \mu_5 (AB_5^3X)] + \lambda_4 [\mu_3 (AB_3^4X) + \mu_5 (AB_5^4X)] + \lambda_5 [\mu_3 (AB_3^5X) + \mu_4 (AB_4^5X)] \equiv 0. \quad (19)$$

Hierbei sind die λ_i Konstante, die nicht alle drei Null sind. Setzen wir hier der Reihe nach $X = B_3$, B_4 und B_5 , so folgt leicht $\lambda_i = \varrho \mu_i$, d. h. die μ_i sind so zu bestimmen, daß

$$\mu_4 \mu_5 [(AB_4^5X) + (AB_5^4X)] + \mu_5 \mu_3 [(AB_5^3X) + (AB_3^5X)] + \mu_3 \mu_4 [(AB_3^4X) + (AB_4^3X)] \equiv 0 \quad (20)$$

wird. Hier ergeben sich vorerst wieder die Punkte B_i selbst, wenn zwei der μ_i Null werden. Setzen wir weiters in (20) $X = C_4$ und $X = C_5$, so folgen

$$\mu_3 : \mu_4 : \mu_5 = \frac{1}{C} : \frac{1}{D} : \frac{1}{E} = DE : EC : CD, \quad (21)$$

d. h. der Punkt

$$B_0 = B_{345} = DE \cdot B_3 + EC \cdot B_4 + CD \cdot B_5 \quad (22)$$

hat ebenfalls die Eigenschaft, daß für $B = B_0$ die drei R_4 von (17) durch denselben R_3 gehen.

Man erhält somit im Allgemeinen bei $B \neq 0$ in der Ebene 2^3 vier Ausnahmepunkte: B_3, B_4, B_5 und B_0 . Daß auch bei B_0 die Transversalebene T_{12345} unbestimmt wird, ergibt sich auch wie folgt: Setzt man (21) in (20) ein, so entsteht CDE mal (13), also in der Tat identisch Null. Für diese vier Punkte B_3, B_4, B_5 und B_0 wird eine der drei Gleichungen (17) überflüssig und man erhält ∞^1 Ebenen T_{12345} durch die Gerade AB gehend und in einem R_3 liegend.

Im allgemeinen Falle haben wir also: Durch AB geht eine einzige Transversalebene T_{12345} mit der Gleichung (18). Sie wird dann und nur dann unbestimmt, wenn B einer der vier Punkte B_3, B_4, B_5 und B_0 ist. Dann gibt es durch AB ∞^1 Ebenen T_{12345} . Erst eine sechste Ebene 6^3 bestimmt unter diesen eine Transversalebene T_{123456} (vgl. den folgenden §).

An Ausnahmefällen haben wir die folgenden:

1. $B \neq 0, CD \neq 0, E = 0$. Hier gibt die Gleichung (19) nur B_3, B_4 und B_5 als Ausnahmepunkte.

2. $B \neq 0, C = D = E = 0$ (Fall (α) , $A = A_{1345}$). Wir wählen in der Ebene 2^3 das Dreieck $B_3 B_4 B_5$ als Koordinatendreieck und stellen einen beliebigen Punkt in 2^3 in der Form

$$B = X_3 B_3 + X_4 B_4 + X_5 B_5$$

dar, so daß also die X_i seine ternären Koordinaten sind. Man findet dann in 2^3 ∞^1 Ausnahmepunkte B , die auf einem durch B_3, B_4 und B_5 gehenden Kegelschnitt mit der Gleichung

$$X_4 X_5 [(y B_4 \ 5^3 A) + (y B_5 \ 4^3 A)] + X_5 X_3 [(y B_5 \ 3^3 A) + (y B_3 \ 5^3 A)] + X_3 X_4 [(y B_4 \ 3^3 A) + (y B_3 \ 4^3 A)] = 0 \quad (23)$$

gelegen sind. Dabei ist y ein beliebiger Punkt außerhalb des R_4 ($A2^3 C_4$).

3. $B = 0, CDE \neq 0$. Hier liegen B_3, B_4 und B_5 auf einer Geraden, was durch

$$B_3 \cdot DE + B_4 \cdot EC + B_5 \cdot CD = 0 \quad (24)$$

zum Ausdruck kommt. Es folgt, daß B_0 von (22) identisch wegfällt. Es gibt dann einen Ausnahmepunkt B_0^* in $2^3 = (B_3 B_4 b)$, und zwar wird:

$$B_0^* = B_3 \cdot D (AbC_5 \ 4^3) + B_4 \cdot [(AbC_5 \ 4^3) + (AbC_4 \ 5^3)] C + b \cdot CD. \quad (25)$$

4. $B = 0, C = D = 0, E \neq 0$. ($A = A_{1234}$). Hier gibt die Gleichung (19) einen von B_3 und B_4 verschiedenen Ausnahmepunkt

$$B_0 = X_3 B_3 + X_4 B_4$$

auf der Geraden $B_3 B_4$.

5. $B = C = D = E = 0$. (Fall (β) des vorigen §, $A = A', A''$ oder A'''). Es gibt keine weiteren Ausnahmepunkte außer den drei auf einer Geraden liegenden B_i .

Dies alles hat noch „allgemeine Lage“ der fünf Ebenen 1^3 bis 5^3 zur Voraussetzung. Es gibt also z. B. keine Gerade, die alle fünf Ebenen schneidet; die drei Geraden, die vier von den fünf Ebenen schneiden, liegen getrennt usw. Die Besonderheiten $B = 0, C = 0$ etc. beziehen sich alle auf eine spezielle Lage des Punktes A in der Ebene 1^3 .

§ 5. Die Transversalebenen T_{123456} .

Bei festem Punkt A in 1^3 und Punkt B in der Ebene 2^3 ist die durch AB gehende Transversalebene T_{12345} gegeben durch den Schnitt der drei vierdimensionalen Räume (17), hat also in veränderlichen Ebenenkoordinaten $\pi_{ijk} = \pi_i \pi_j \pi_k$ die Gleichung

$$K_{345\pi} = (AB^{3^3\pi}) (AB^{4^3\pi}) (AB^{5^3\pi}) = 0. \quad (26)$$

Dieses $K_{345\pi}$ verschwindet nur für die in 2^3 gelegenen Ausnahmepunkte identisch, d. h. für alle π_{ijk} . Ist B von diesen Ausnahmepunkten B_3, B_4, B_5 und B_0 verschieden und soll diese Ebene noch eine sechste Ebene 6^3 schneiden, also eine Transversalebene T_{123456} sein, so muß

$$K_{3456} = (AB^{3^36}) (AB^{4^36}) (AB^{5^36}) = 0 \quad (27)$$

sein.

Ist diese Bedingung (27) erfüllt, so wird durch (26) die Gleichung der Transversalebene T_{123456} gegeben. Für einen Ausnahmepunkt B_i ($= B_3, B_4, B_5, B_{345}$) hat man eine der Ebenen $3^3, 4^3$ oder 5^3 durch 6^3 zu ersetzen. So ist z. B.

$$K_{456\pi} (A, B_3) = (AB_3^{4^3\pi}) (AB_3^{5^3\pi}) (AB_3^{6^3\pi}) = 0$$

die Gleichung der durch AB_3 gehenden Transversalebene T_{123456} .

In der Komitante K_{3456} von (27) sind die vier Ebenen $3^3, 4^3, 5^3$ und 6^3 linear enthalten, und zwar in schiefer Symmetrie. Dies sieht man bei $3^3, 4^3$ und 5^3 direkt wegen

$$K_{3456} = -K_{4356} = \dots$$

Bringen wir in (27) alle drei Reihen 6 in den ersten Klammerfaktor (AB^{3^36}) , so entsteht

$$K_{3456} = -K_{6453};$$

es gilt also allgemein:

$$K_{ijmn} = -K_{jimn} = +K_{jinm} = \dots \quad (28a)$$

d. h. K_{ijmn} ist in den Indices alternierend.

Es gilt aber überdies noch eine weitere Besonderheit: die K_{ijmn} erfüllen die „ p -Relationen“, d. h. verhalten sich wie R_3 -Koordinaten. Geht man nämlich von

$$K_{3456} K_{7890} = (3^3 6AB) (4^3 6AB) (5^3 6AB) \cdot (7^3 0AB) (8^3 0AB) (9^3 0AB)$$

aus und bringt durch identisches Umformen alle drei Reihen 7 des vierten Klammerfaktors in den ersten, so entsteht, wenn wir nur die beteiligten Faktoren (ohne die Reihen AB) anschreiben:

$$(3^3 6) (7^3 0) = (7^3 6) (3^3 0) - 3 (7^3 3) (3^2 60) (4^3 6) (5^3 6).$$

Vereinigen wir hier schließlich alle drei Reihen 6 im zweiten Klammerfaktor des zweiten Terms der rechten Seite, so kommt

$$K_{3456} K_{7890} = K_{7456} K_{3890} - K_{7356} K_{4890} + K_{7346} K_{5890} - K_{7345} K_{6890}. \quad (28b)$$

Faßt man die Reihen A und B in (27) zur Geraden π^2 zusammen, so stellt

$$K_{3456} (\pi^2) = 0$$

einen Linienkomplex dritten Grades dar. Er ist der geometrische Ort aller Geraden des R_5 , durch die eine Ebene möglich ist, die die fünf Ebenen 2^3 bis 6^3 trifft. Muß π^2 durch einen festen Punkt A gehen, so stellt

$$K_{3456} (AB) = (AB3^3 6) (AB4^3 6) (AB5^3 6) = 0$$

für veränderliche B einen Kegel dritter Ordnung mit Spitze A dar. Dieser Kegel schneidet die Ebene 2^3 in einer Kurve dritter Ordnung $K_{3456} (B) = 0$. Sie ist der Ort der Schnittpunkte aller ∞^1 Transversalebenen T_{123456} mit der Ebene 2^3 und geht durch die Ausnahmepunkte B_3, B_4, B_5 und $B_0 = B_{345}$. Es folgt weiter, daß diese Kurve auch die Punkte B_6, B_{456}, B_{356} und B_{346} enthält, so daß also auf ihr acht Punkte rational bekannt sind.

§ 6. Die Komitanten $U_{ijk}^{(6)}$.

Daß die Kurve dritter Ordnung $K_{3456} (B) = 0$ durch die Punkte B_3, B_4 und B_5 geht, ist aus (27) unmittelbar ersichtlich und kommt auch zum Ausdruck, wenn wir — unter der Voraussetzung, daß die Invariante

$$B = (B_4 B_5 3^3 A) \quad (\text{vgl. (9)})$$

nicht verschwindet — in der Ebene 2^3 das Dreieck $B_3 B_4 B_5$ als Koordinatendreieck wählen, d. h. also

$$B = X_3 B_3 + X_4 B_4 + X_5 B_5 \quad (29)$$

setzen. Aus (27) entsteht dann

$$K_{3456}(B) = \begin{cases} X_4 X_5^2 U_{554} + X_4^2 X_5 U_{454} \\ + X_5 X_3^2 U_{533} + X_5^2 X_3 U_{553} + X_3 X_4 X_5 (U_{453} + U_{534}) = 0 \\ + X_3 X_4^2 U_{434} + X_3^2 X_4 U_{433} \end{cases} \quad (30)$$

Hierbei ist gesetzt:

$$U_{ijk} = U_{ijk}^{(6)} = (AB_i \ 3^3 \ 6) (AB_j \ 4^3 \ 6) (AB_k \ 5^3 \ 6), \quad (31)$$

also z. B. voll ausgeschrieben, wobei die Reihen $\dot{2}$ und $\ddot{2}$ mit 2 äquivalent sind:

$$\begin{aligned} U_{454}^{(6)} &= (AB_4 \ 3^3 \ 6) (AB_5 \ 4^3 \ 6) (AB_4 \ 5^3 \ 6) = \\ &= (A23^3 \ 6) (2^2 \ 4^3 \ A) \cdot (A\dot{2}4^3 \ 6) (\dot{2}^2 \ 5^3 \ A) \cdot (A\ddot{2}5^3 \ 6) (\ddot{2}^2 \ 4^3 \ A), \end{aligned}$$

d. h. diese Invarianten U_{ijk} sind vom *sechsten* Grad in den A .

Daß die Kurve (30) für willkürliche 6_{ijk} auch durch den Punkt

$$B_{345} = DE \cdot B_3 + EC \cdot B_4 + CD \cdot B_5 \quad (\text{vgl. (24)})$$

geht, ergibt sich jetzt folgendermaßen. Nach (12a) sind die drei R_4 mit den Gleichungen

$$(D_5 \ 3^3 \ Ax) = 0, (E_3 \ 4^3 \ Ax) = 0 \text{ und } (C_4 \ 5^3 \ Ax) = 0$$

linear-abhängig, es gilt also

$$(D_5 \ 3^3 \ A\pi) (E_3 \ 4^3 \ A\pi) (C_4 \ 5^3 \ A\pi) \equiv 0 \quad (\text{für alle } \pi_{ijk}). \quad (31a)$$

Die genannten vierdimensionalen Räume stehen auch in den Gleichungen (12b) links; es ist deshalb nach (12b) auch, wenn wir die rechten Seiten dieser Gleichungen verwenden:

$$\begin{aligned} [D (B_5 \ 3^3 \ A\pi) + E (B_4 \ 3^3 \ A\pi)] \cdot [E (B_3 \ 4^3 \ A\pi) + \\ + C (B_5 \ 4^3 \ A\pi)] \cdot [C (B_4 \ 5^3 \ A\pi) + D (B_3 \ 5^3 \ A\pi)] \equiv 0. \end{aligned}$$

Führt man dies aus und schreibt statt $U_{ijk}^{(n)}$ kürzer U_{ijk} , so kommt

$$W = \begin{cases} C^2 [DU_{554} + EU_{454}] \\ + D^2 [EU_{533} + CU_{553}] + CDE (U_{453} + U_{534}) = 0 \\ + E^2 [CU_{434} + DU_{433}] \end{cases} \quad (32)$$

Setzen wir andererseits in (30)

$$X_3 = DE, X_4 = EC, X_5 = CD,$$

so entsteht

$$K_{3456}(B_{345}) = CDE \cdot W,$$

was also nach (32) verschwindet.

Die U_{ijk} sind durch (32) verknüpft. Bei $CDE \neq 0$ ist es dann möglich, die Summe $U_{453} + U_{534}$ durch die übrigen U_{ijk} auszudrücken, wovon wir sogleich Gebrauch machen werden. Für die genannte Summe $U_{453} + U_{534}$ ist noch ein anderer Ausdruck zu bekommen, wenn man von (13) ausgeht. Diese Gleichung (13) besagt, daß die drei R_4 , die durch die eckigen Klammern auf der linken Seite gegeben werden, linear-abhängig sind. Es ist daher

$$[(6B_4 \ 5^3 A) + (6B_5 \ 4^3 A)] \cdot [(6B_5 \ 3^3 A) + (6B_3 \ 5^3 A)] \cdot [(6B_3 \ 4^3 A) + (6B_4 \ 3^3 A)] \equiv 0. \quad (33)$$

Die hier auftretenden Produkte wie

$$(6B_3 \ 4^3 A) (6B_5 \ 4^3 A) (6B_3 \ 5^3 A) \quad (34)$$

lassen sich umformen. Es ist

$$(6B_3 \ 4^3 A) (6B_5 \ 4^3 A) = \frac{1}{2} (6^2 \ 4^3 A) (B_3 B_5 \ 4^3 A) = -\frac{1}{2} B \cdot (6^2 \ 4^3 A).$$

Setzt man also

$$F_i = 6 (6^2 \ i^3 A) \quad (i = 3, 4, 5), \quad (35)$$

so wird aus (34)

$$(6B_3 \ 4^3 A) (6B_5 \ 4^3 A) (6B_3 \ 5^3 A) = \frac{1}{2} B \cdot (B_3 F_4 \ 5^3 A). \quad (36)$$

Setzen wir weiters

$$F_{ijk} = (F_i B_j \ k^3 A), \quad (37)$$

dann erhält man aus (33)

$$U_{453} + U_{534} = \frac{1}{2} B \cdot \{[(F_4 B_3 \ 5^3 A) + (F_5 B_3 \ 4^3 A)] + [(F_5 B_4 \ 3^3 A) + (F_3 B_4 \ 5^3 A)] + [(F_3 B_5 \ 5^3 A) + (F_4 B_5 \ 3^3 A)]\},$$

und also nach (37):

$$U_{453} + U_{534} = \frac{1}{2} B \cdot \{F_{345} + F_{354} + F_{435} + F_{453} + F_{543} + F_{534}\}. \quad (38)$$

Analog zu (8) haben wir mit Benützung von (35):

$$\frac{1}{3} F \cdot (6^3 \pi^3) = (F_3 F_4 F_5 \pi^3), \quad (39)$$

wobei F die Invariante

$$F = (F_3 F_4 \ 5^3 A) = (F_4 F_5 \ 3^3 A) = (F_5 F_3 \ 4^3 A) \quad (40)$$

vorstellt. Ersetzen wir jetzt in

$$-U_{ijk}^{(6)} = (6B_i \ 3^3 A) (6B_j \ 4^3 A) (6B_k \ 5^3 A)$$

die 6_{rst} durch $(F_3 F_4 F_5)_{rst}$, so läßt sich $F \cdot U_{ijk}^{(6)}$ durch die F_{rst} von (37) ausdrücken:

$$F \cdot U_{ijk}^{(6)} = F_{4i3} F_{5j4} F_{3k5} - F_{5i3} F_{3j4} F_{4k5}. \quad (41)$$

Wir haben zwölf Invarianten F_{ijk} :

$$\begin{cases} F_{443} = (F_4 B_4 3^3 A) & F_{334} & F_{335} \\ F_{453} = (F_4 B_5 3^3 A) & F_{354} & F_{345} \\ F_{543} = (F_5 B_4 3^3 A) & F_{534} & F_{435} \\ F_{553} = (F_5 B_5 3^3 A) & F_{554} & F_{445} \end{cases} \quad (42)$$

Sie treten auch auf, wenn wir in $U_{ijk}^{(6)}$ durch Umformung 3^3 mit 6^3 vertauschen; es ist z. B.

$$\begin{aligned} -U_{ijk}^{(6)} &= (6B_i 3^3 A) (6B_j 4^3 A) (6B_k 5^3 A) = \\ &= \frac{1}{2} F_{3k5} (B_i B_j 4^3 A) - \frac{1}{2} F_{3j4} (B_i B_k 5^3 A) - \\ &\quad - (3B_i 6^3 A) (3B_j 4^3 A) (3B_k 5^3 A). \end{aligned} \quad (43)$$

Auch die Umformung des Produktes $U_{ijk}^{(6)} U_{rst}^{(6)}$ führt auf diese Komitanten (42). Bringt man in

$$U_{ijk}^{(6)} U_{rst}^{(6)} = (B_i 3^3 A 6) (B_r 3^3 A 6) \cdot (B_j 4^3 A 6) (B_s 4^3 A 6) \cdot (B_k 5^3 A 6) (B_t 5^3 A 6) \quad (44)$$

die Reihe B_r des zweiten Klammerfaktors in den ersten, so entsteht

$$U_{ijk} U_{rst} = U_{rjk} U_{ist} + (B_i B_r 3^3 A) (663^3 A) \dots$$

Da i und r nur 4 oder 5 sein können, kann man hier $i = 4$ und $r = 5$ setzen und erhält, wenn man noch eine Reihe 6 in den Klammerfaktor $(663^3 A)$ hineinzieht:

$$U_{4jk} U_{5st} = U_{5jk} U_{4st} + \frac{1}{4} B (B_j B_s 4^3 A) F_{3k5} F_{4t5} + \frac{1}{4} B (B_k B_t 5^3 A) F_{3j4} F_{584}. \quad (45)$$

Man sieht, daß in den beiden letzten Termen noch ein Faktor B enthalten ist. So hat man z. B. für $jkst = 3334$:

$$U_{433} U_{534} = U_{533} U_{434} + \frac{1}{4} B^2 F_{334} F_{534} \quad (45a)$$

und für $jkst = 3354$:

$$U_{433} U_{554} = U_{533} U_{454} + \frac{1}{4} B^2 (F_{334} F_{554} - F_{335} F_{445}). \quad (45b)$$

Führt man bei den zwei mittleren oder bei den zwei letzten Faktoren von (44) die analoge Umformung aus, so entstehen Relationen, die aus (45) durch zyklische Vertauschung von 3, 4, 5 erhalten werden können.

Bei den Komitanten (42) haben wir zwischen den F_{ijk} derselben Vertikalspalte je eine Syzygie. Es ist z. B.:

$$F_{443} \cdot F_{553} = F_{543} \cdot F_{453} + BF. \quad (46)$$

Die Komitanten U_{ijk} sind spezielle Fälle, die sich aus den Ausdrücken

$$U_{XYZ} = (AX3^3 6) (A Y4^3 6) (AZ5^3 6) \quad (47)$$

ergeben, wenn X , Y und Z durch Punkte B_i ersetzt werden. Nimmt

man allgemeiner an Stelle von X , Y und Z die zwölf Punkte des bei Figur 1 gegebenen Schemas, setzt also

$$X = B_4, B_5, D_5 \quad Y = B_3, B_5, E_3 \quad Z = B_3, B_4, C_4, \quad (48)$$

so entstehen 27 Ausdrücke U_{XYZ} . Sie sind nicht voneinander unabhängig. Die Gleichungen (12) ergeben nämlich unmittelbar die Relationen

$$\begin{cases} B \cdot U_{D_5YZ} = E \cdot U_{B_4YZ} + D \cdot U_{B_5YZ} \\ B \cdot U_{XB_5Z} = C \cdot U_{XB_5Z} + E \cdot U_{XB_5Z} \\ B \cdot U_{XYC_4} = D \cdot U_{XYB_5} + C \cdot U_{XYB_4} \end{cases} \quad (49)$$

Man erhält für die Punkte (48) 27 verschiedene Gleichungen, zu denen noch die Identität

$$U_{D_5E_3C_4}^{(\pi)} \equiv 0 \quad \{\text{für alle } \pi_{ijk}\} \quad (50)$$

hinzutritt. Man kann dann zeigen, daß die genannten 27 Gleichungen sich auf eine einzige reduzieren lassen, nämlich auf die Syzygie (32).

Schließlich sei noch die Gestalt von $U_{ijk}^{(6)}$ angegeben, die sich einstellt, wenn man zu Raumkoordinaten $3^3, 4^3, \dots$ der Ebenen $3^3, 4^3, \dots$ übergeht:

$$U_{ijk}^{(6)} = 36 (6^3 3' 4' 5') (3' B_i) (3' A) \cdot (4' B_j) (4' A) \cdot (5' B_k) (5' A) \quad (51)$$

§ 7. Die Kurven dritter Ordnung T_{ijmn} .

Unter der Voraussetzung $B \neq 0$ eliminieren wir jetzt den letzten Koeffizienten $U_{453} + U_{534}$ in Gleichung (30) mit Hilfe von (32).

Setzen wir

$$L_3 = DX_4 - EX_5, \quad L_4 = EX_5 - CX_3, \quad L_5 = CX_3 - DX_4 \quad (52)$$

so gilt

$$L_3 + L_4 + L_5 \equiv 0 \quad (53)$$

und die drei Geraden $L_i = 0$ in der Ebene 2^3 sind die drei Verbindungslinien des Punktes B_{345} (vgl. (22)) mit den Eckpunkten B_3, B_4 und B_5 unseres X -Koordinatendreieckes.

Bilden wir jetzt den Ausdruck $CDE \cdot K_{3456}$ und subtrahieren hiervon $CDE \cdot X_3 X_4 X_5 \cdot W$, so entsteht

$$\begin{aligned} CDE \cdot (K_{3456} - W \cdot X_3 X_4 X_5) &= T_{3456} = \\ &= X_4 X_5 (CDU_{554}^{(6)} L_4 - ECU_{454}^{(6)} L_5) + X_5 X_3 (DEU_{553}^{(6)} L_5 - CDU_{553}^{(6)} L_3) + \\ &\quad + X_3 X_4 (ECU_{434}^{(6)} L_3 - DEU_{433}^{(6)} L_4) \end{aligned} \quad (54)$$

Wir sprechen also, wenn die Kurve dritter Ordnung $K_{3456}(B) =$ in dieser Gestalt dargestellt wird, von der Kurve T_{3456} , gegeben durch die

ternäre Form dritten Grades (54). An dieser Gestalt der Kurvengleichung ist unmittelbar zu erkennen, daß die Kurve durch die Punkte B_i und durch den Punkt B_{345} (= Schnittpunkt der Geraden $L_i = 0$) geht.

Zur Abkürzung setzen wir jetzt:

$$\begin{cases} c=c^6=CD \cdot U_{554}^{(6)}=CDc'^6 & d=d^6=DE \cdot U_{533}^{(6)}=DEd'^6 \\ \gamma=\gamma^6=CE \cdot U_{454}^{(6)}=CE\gamma'^6 & \delta=\delta^6=DC \cdot U_{553}^{(6)}=DC\delta'^6 \end{cases} \quad \begin{cases} e=e^6=EC \cdot U_{434}^{(6)}=ECe'^6 \\ \eta=\eta^6=ED \cdot U_{433}^{(6)}=ED\eta'^6 \end{cases} \quad (55)$$

Dann kommt statt (54):

$$T_{3456}=X_4X_5(c^6L_4-\gamma^6L_5)+X_5X_3(d^6L_5-\delta^6L_3)+X_3X_4(e^6L_3-\eta^6L_4)=0. \quad (56)$$

Solange es sich nur um eine einzige, von 6^3 abhängige Kurve handelt, kann man bei den $c, \gamma, \dots$ den oberen Index weglassen.

Für die Struktur mancher Formeln ist es naturgemäß von dem Begriffe „zyklisches Weitergehen“ $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ Gebrauch zu machen. Es zieht dies ein gleichzeitiges Weitergehen $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C$ (vgl. (11)) nach sich, während die Invariante B (Gleichung (9)) unverändert bleibt. Ferners entsteht aus U_{554} die Komitante U_{533} usw., so daß sich das zyklische Weitergehen auch auf

$$c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c \text{ und } \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \eta \rightarrow \gamma$$

überträgt. So entstehen dann in T_{3456} von (56) der zweite und dritte Term rechter Hand aus dem ersten $X_4X_5(cL_4-\gamma L_5)$ durch zyklisches Weitergehen, d. h. T_{3456} selbst ist bei diesen Permutationen von 3, 4, 5 invariant.

Zwei Kurven dritter Ordnung $T_{3456} = 0$ und $T_{3457} = 0$ haben neben den allen Kurven $T_{345\pi} = 0$ gemeinsamen vier Punkten B_3, B_4, B_5 und B_{345} noch weitere fünf Schnittpunkte B_{67}^* . Wir erhalten also fünf Transversalebene $T_{1234567}$ in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß durch einen Punkt A des R_5 im Allgemeinen fünf Ebenen gehen, die sechs gegebene Ebenen schneiden. (Dual zu dem Satze, daß im R_4 zu 6 Geraden 5 Transversalebene existieren). Die Ermittlung dieser fünf Ebenen kommt also auf die Bestimmung der fünf Punkte B_{67}^* zurück.

Neben den zwei Kurven T_{3456} und T_{3457} haben wir drei weitere: T_{4567} , T_{5367} und T_{3467} . Daß auch diese drei Kurven durch die fünf Punkte B_{67}^* gehen, ist geometrisch (wegen der Transversalebene $T_{1234567}$) evident. Algebraisch folgt es aus den p -Relationen (28b), die natürlich für die T_{ijmn} ebenso gelten als für die K_{ijmn} . Nach (28b) haben wir z. B.

$$T_{7834} T_{6345} = T_{6834} T_{7345} - T_{6734} T_{8345}. \quad (57)$$

Für einen Punkt B_{67}^* ist nun T_{6345} und T_{7345} Null, also auch

$$T_{6734} \cdot T_{8345} = 0,$$

d. h. da B_{67}^* von einer achten Ebene 8^3 unabhängig ist, $T_{6734} = 0$.

Die fünf Kurven dritter Ordnung T_{ijmn} mit Indizes $ijmn = 34567$ haben also alle fünf Punkte B_{67}^* gemein. Je zwei von ihnen, z. B. T_{3456} und T_{3457} haben B_3, B_4, B_5 und B_{345} als vier restliche Schnittpunkte. Je drei dieser Kurven, z. B. T_{3467}, T_{3457} und T_{3456} haben sieben Punkte gemein, nämlich die fünf Punkte B_{67}^* und die beiden Punkte B_3 und B_4 .

Liegt eine achte Ebene 8^3 vor, so erhalten wir in der Ebene $2^3 \binom{6}{4} = 15$ Kurven dritter Ordnung T_{ijmn} . Ist nun der Punkt A in 1^3 so gewählt, daß die drei Kurven

$$T_{3456} = 0, T_{3457} = 0 \text{ und } T_{3458} = 0 \quad (58)$$

einen Punkt B^* gemein haben, so folgt, daß dieser Punkt B^* allen 15 Kurven T_{ijmn} gemeinsam ist. Greifen wir, um dies zu beweisen, wieder auf die p -Relation (28b) zurück. Wenn $i = 3, 4$ oder 5 ist, haben wir

$$T_{789i} T_{6345} = T_{689i} T_{7345} - T_{679i} T_{8345} + T_{678i} T_{9345}; \quad (59)$$

gilt (58), so folgt $T_{678i} \cdot T_{9345} = 0$, also $T_{678i} = 0$ für B^* .

Daß die drei Kurven (58) außerhalb B_3, B_4, B_5 und B_{345} einen Punkt B^* gemein haben, ist einer Bedingung äquivalent, d. h. wir haben in der Ebene $1^3 \infty^1$ Punkte A , wofür (58) gültig ist.

§ 8. Die Kegelschnitte $Q_i = 0$.

Wir gehen aus von den drei Kurven dritter Ordnung (58) mit den in der Gestalt (56) geschriebenen Gleichungen

$$T_{345i} = X_4 X_5 (c^i L_4 - \gamma^i L_5) + X_5 X_3 (d^i L_5 - \delta^i L_3) + X_3 X_4 (e^i L_3 - \eta^i L_4) = 0 \\ (i = 6, 7, 8). \quad (60)$$

Mit diesen Formen lassen sich Linearkombinationen bilden, bei denen die Linearfaktoren X_3, X_4 und X_5 abzuspalten sind. Setzt man

$$(c\gamma)^{78} = c^7 \gamma^8 - c^8 \gamma^7,$$

dann enthält die Summe

$$\sum_{6, 7, 8} T_{3456} (c\gamma)^{78} = T_{3456} (c\gamma)^{78} + T_{3457} (c\gamma)^{86} + T_{3458} (c\gamma)^{67}$$

den Faktor X_3 , ist also gleich X_3 mal einer in den X_i quadratischen Form Q_3 . Man erhält

$$\sum_{6, 7, 8} T_{3456} (c\gamma)^{78} = X_3 \cdot Q_3 = X_3 \cdot \{X_4 [(ec\gamma) L_3 - (\eta c\gamma) L_4] + \\ + X_5 [(dc\gamma) L_5 - (\delta c\gamma) L_3]\}.$$

Hierbei sind $(ec\gamma)$, $(\eta c\gamma)$, ... ternäre Klammerfaktoren im Gebiete 6, 7, 8, also

$$(ec\gamma) = \begin{vmatrix} e^6 & e^7 & e^8 \\ c^6 & c^7 & c^8 \\ \gamma^6 & \gamma^7 & \gamma^8 \end{vmatrix} = e_3, \quad (\delta c\gamma) = \begin{vmatrix} \delta^6 & \delta^7 & \delta^8 \\ c^6 & c^7 & c^8 \\ \gamma^6 & \gamma^7 & \gamma^8 \end{vmatrix} = \delta_3, \text{ etc.} \quad (61a)$$

und analog mit $(d\delta)^{ik}$, $(e\eta)^{ik}$:

$$(cd\delta) = \begin{vmatrix} c^6 & c^7 & c^8 \\ d^6 & d^7 & d^8 \\ \delta^6 & \delta^7 & \delta^8 \end{vmatrix} = c_4, \quad (ce\eta) = \begin{vmatrix} c^6 & c^7 & c^8 \\ e^6 & e^7 & e^8 \\ \eta^6 & \eta^7 & \eta^8 \end{vmatrix} = c_5, \text{ etc.} \quad (61b)$$

Wir bekommen auf diese Weise die drei Beziehungen

$$\begin{cases} ST_{3456}(c\gamma)^{78} = X_3 \cdot Q_3 = X_3 \cdot \{ \begin{matrix} * & X_4(e_3L_3 - \eta_3L_4) + X_5(d_3L_5 - \delta_3L_3) \end{matrix} \} \\ ST_{3456}(d\delta)^{78} = X_4 \cdot Q_4 = X_4 \cdot \{ X_3(e_4L_3 - \eta_4L_4) & * & + X_5(c_4L_4 - \gamma_4L_5) \} \\ ST_{3456}(e\eta)^{78} = X_5 \cdot Q_5 = X_5 \cdot \{ X_3(d_5L_5 - \delta_5L_3) + X_4(c_5L_4 - \gamma_5L_5) & * & \} \end{cases} \quad (62)$$

$Q_i = 0$ stellt einen Kegelschnitt in der Ebene 2^3 dar, der durch die Punkte B_i und B_{345} (Gleichung (22)) geht. Ausgeschrieben haben wir:

$$\begin{cases} Q_3 = * X_4^2 D e_3 + X_5^2 E \delta_3 + X_4 X_5 (-E(e_3 + \eta_3) - D(d_3 + \delta_3)) + X_5 X_3 C d_3 + X_3 X_4 C \eta_3 \\ Q_4 = X_3^2 C \eta_4 & * & + X_5^2 E c_4 + X_4 X_5 D \gamma_4 & + X_5 X_3 (-C(c_4 + \gamma_4) - E(e_4 + \eta_4)) + \\ & & & + X_3 X_4 D e_4 \quad (63) \\ Q_5 = X_3^2 C d_5 + X_4^2 D \gamma_5 & * & + X_4 X_5 E c_5 & + X_5 X_3 E \delta_5 & + X_3 X_4 (-D(d_5 + \delta_5) - \\ & & & & - C(c_5 + \gamma_5)) \end{cases}$$

Das zyklische Weitergehen $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ Überträgt sich nach (61) auch auf die c_4 , γ_4 etc. und auf die Formen Q_i . Es ist also z. B.

$$c_4 \rightarrow d_5 \rightarrow e_3 \rightarrow c_4; \quad \gamma_5 \rightarrow \delta_3 \rightarrow \eta_4 \rightarrow \gamma_5 \text{ etc. und } Q_3 \rightarrow Q_4 \rightarrow Q_5 \rightarrow Q_3. \quad (64)$$

Aus (62) ist zu ersehen, daß das Verschwinden der drei Komitanten T_{345i} ($i = 6, 7, 8$) bei $X_i \neq 0$ auch die Gleichungen $Q_j = 0$ ($j = 3, 4, 5$) nach sich zieht. Umgekehrt folgt aus $Q_j = 0$ auch $T_{345i} = 0$, wenn die Determinante Δ der Koeffizienten $(c\gamma)^{ik}$, ... der linken Seite von (62) von Null verschieden ist. Man hat

$$\begin{aligned} \Delta &= ((c\gamma) (d\delta) (e\eta)) = (cd\delta) (\gamma e\eta) - (ce\eta) (\gamma d\delta) = c_4 \gamma_5 - c_5 \gamma_4 \\ \Delta &= c_4 \gamma_5 - c_5 \gamma_4 = d_5 \delta_3 - d_3 \delta_5 = e_3 \eta_4 - e_4 \eta_3. \end{aligned} \quad (65)$$

Eine geometrische Deutung von $\Delta = 0$ ist leicht anzugeben. Die Gerade $X_3 = 0$ schneidet den Kegelschnitt $Q_4 = 0$ im Punkte B_4 und im Punkte

$$X_3^{(4)} : X_4^{(4)} : X_5^{(4)} = 0 : -Ec_4 : D\gamma_4;$$

Q_5 wird von $X_3 = 0$ in B_5 und im Punkte

$$X_3^{(5)} : X_4^{(5)} : X_5^{(5)} = 0 : -Ec_5 : D\gamma_5$$

geschnitten. Die Punkte $X^{(4)}$ und $X^{(5)}$ fallen also zusammen für

$$DE(c_4\gamma_5 - c_5\gamma_4) = DE \cdot \Delta = 0. \quad (66)$$

Ist somit $\Delta = 0$, so schneiden sich Q_4 und Q_5 auf $X_3 = 0$ und nach (65) schneiden sich dann gleichzeitig Q_5 und Q_3 auf $X_4 = 0$ und Q_3 und Q_4 auf der Seite $X_5 = 0$ des Koordinatendreieckes $B_3 B_4 B_5$.

Für die Discriminanten der Kegelschnitte Q_i findet man aus (63):

$$\begin{cases} \Delta_{Q_3} = C^2 \cdot (Dd_3 + E\eta_3) \cdot (\bar{d}_3 e_3 + \bar{d}_3 \eta_3 + \eta_3 \delta_3) \\ \Delta_{Q_4} = D^2 \cdot (Ee_4 + C\gamma_4) \cdot (e_4 c_4 + e_4 \gamma_4 + \gamma_4 \eta_4) \\ \Delta_{Q_5} = E^2 \cdot (Cc_5 + D\delta_5) \cdot (c_5 \bar{d}_5 + c_5 \delta_5 + \delta_5 \gamma_5) \end{cases} \quad (67)$$

§ 9. Die Größen c_i, γ_k .

Die durch (55) eingeführten Abkürzungen

$$c^i, \gamma^i; d^i, \delta^i; e^i, \eta^i$$

für die Komitanten $CDU_{554}^{(i)}$ etc. können bei $i = 6, 7, 8$ in die Matrix

$$\begin{vmatrix} c^6 & \gamma^6 & d^6 & \delta^6 & e^6 & \eta^6 \\ c^7 & \gamma^7 & d^7 & \delta^7 & e^7 & \eta^7 \\ c^8 & \gamma^8 & d^8 & \delta^8 & e^8 & \eta^8 \end{vmatrix} \quad (68)$$

zusammengestellt werden. Die dreireihigen Determinanten dieser Matrix sind die 20 ternären Klammerfaktoren im Gebiete 6, 7, 8, die man aus den Koordinaten von sechs Punkten c, γ, d, δ, e und η bilden kann. Von diesen 20 dreireihigen Determinanten haben wir bereits 12 in den Gleichungen (61a) und (61b) aufgezählt und durch die kürzere Bezeichnung c_4, δ_5 , etc. festgehalten. Man beweist mit Hilfe der quadratischen p -Relationen von Ebenenkoordinaten im R_5 (oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit Hilfe der Identitäten zwischen ternären Klammerfaktoren) leicht, daß die acht weiteren Determinanten aus (68) wie z. B. $(cde), (cd\eta), \dots$ rational durch die in (61) angegebenen, also durch

$$\begin{cases} c_4 & c_5 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ \bar{d}_5 & \bar{d}_3 & \delta_5 & \delta_3 \\ e_3 & e_4 & \eta_3 & \eta_4 \end{cases} \quad (69)$$

ausgedrückt werden können. Da von den 20 Determinanten aus (68) aber nur zehn algebraisch-unabhängig sind, müssen zwischen diesen zwölf Größen (69) noch zwei Syzygien bestehen. Sie sind in der Tat vorhanden und durch (65) gegeben.

Mit den Bezeichnungen (55) erhält die Identität (32) die Form

$$C(c + \gamma) + D(d + \delta) + E(e + \eta) + CDE \cdot \varepsilon = 0 \quad (70)$$

wobei

$$\varepsilon = U_{453} + U_{534} \quad (71)$$

gesetzt ist. Man könnte also zu den sechs „Punkten“ $c, \gamma, \dots$ noch einen siebenten Punkt ε hinzunehmen und auch Faktoren

$$\varepsilon_3 = (\varepsilon c \gamma), \varepsilon_4 = (\varepsilon d \delta) \text{ und } \varepsilon_5 = (\varepsilon e \eta)$$

beschauen. Nach (70) wäre dann z. B.

$$-CDE \cdot \varepsilon_3 = D(d_3 + \delta_3) + E(e_3 + \eta_3) \text{ usw.}$$

Die sechs Größen $c, \gamma, d, \delta, e, \eta$ enthalten nach (55) noch Faktoren C, D und E . Dies überträgt sich natürlich auch auf die Determinanten (69). Wir haben z. B.

$$c_4 = (cd\delta) = \begin{vmatrix} CDU_{554}^{(6)} & CDU_{554}^{(7)} & CDU_{554}^{(8)} \\ DEU_{533}^{(6)} & DEU_{533}^{(7)} & DEU_{533}^{(8)} \\ DCU_{553}^{(6)} & DCU_{553}^{(7)} & DCU_{553}^{(8)} \end{vmatrix} = C^2 D^3 E \cdot \text{Det.} \begin{vmatrix} U_{554}^{(6)} & U_{533}^{(7)} & U_{553}^{(8)} \end{vmatrix}.$$

Gebrauchen wir also für die rechts stehende Determinante der U_{ijk} die Abkürzungen (vgl. (55))

$$c'_4 = \text{Det.} \begin{vmatrix} U_{554}^{(6)} & U_{533}^{(7)} & U_{553}^{(8)} \end{vmatrix} = \text{Det.} \begin{vmatrix} c'^6 d'^7 \delta'^8 \end{vmatrix}; \quad c'_5 = \text{Det.} \begin{vmatrix} U_{554}^{(6)} & U_{434}^{(7)} & U_{433}^{(8)} \end{vmatrix} \\ = \text{Det.} \begin{vmatrix} c'^6 e'^7 \eta'^8 \end{vmatrix} \text{ etc.,} \quad (72)$$

so entsteht aus dem Schema (69):

$$\begin{cases} c_4 = C^2 D^3 E \cdot c'_4 & c_5 = C^2 D^2 E^2 \cdot c'_5 & \gamma_4 = C^2 D^2 E^2 \cdot \gamma'_4 & \gamma_5 = C^2 D E^3 \cdot \gamma'_5 \\ d_5 = C D^2 E^3 \cdot d'_5 & d_3 = C^2 D^2 E^2 \cdot d'_3 & \delta_5 = C^2 D^2 E^2 \cdot \delta'_5 & \delta_3 = C^3 D^2 E \cdot \delta'_3 \\ e_3 = C^3 D E^2 \cdot e'_3 & e_4 = C^2 D^2 E^2 \cdot e'_4 & \eta_3 = C^2 D^2 E^2 \cdot \eta'_3 & \eta_4 = C D^3 E^2 \cdot \eta'_4 \end{cases} \quad (73)$$

Aus (65) wird jetzt

$$\Delta = C^4 D^4 E^4 \cdot \Delta' = C^4 D^4 E^4 (c'_4 \gamma'_5 - c'_5 \gamma'_4) = \dots \quad (74)$$

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß sich von den 12 Größen (69) $c_4, c_5, \dots$, oder, was dasselbe ist, von den Größen $c'_4, c'_5, \dots$ (vgl. (73)), der Faktor B^2 absondern läßt. Zu diesem Zwecke schreiben wir die U_{ijk} auf die folgende Weise:

$$U_{ikj}^{(6)} = (6B_i 3^3 A) (6B_j 4^3 A) (6B_k 5^3 A) = (6u'_i) (6v'_j) (6w'_k), \quad (75)$$

d. h. wir führen die vierdimensionalen Räume ein

$$\left\{ \begin{array}{ccc} * & v'_3 = (B_3 4^3 A) & w'_3 = (B_3 5^3 A) \\ u'_4 = (B_4 3^3 A) & * & w'_4 = (B_4 5^3 A) \\ u'_5 = (B_5 3^3 A) & v'_5 = (B_5 4^3 A) & * \end{array} \right\} \quad (76)$$

so daß also (75) enthalten ist in dem Schema

$$\left\{ \begin{array}{lll} U_{564}^{(6)} = 6_{u,v,w} & U_{533}^{(6)} = 6_{u,v,w} & U_{434}^{(6)} = 6_{u,v,w} \\ U_{454}^{(6)} = 6_{u,v,w} & U_{553}^{(6)} = 6_{u,v,w} & U_{453}^{(6)} = 6_{u,v,w} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(wobei der Kürze halber} \\ 6_{u_i v_j w_k} \text{ an Stelle von} \\ (6u_i') (6v_j') (6w_k') \text{ ge-} \\ \text{schrieben ist).} \end{array} \quad (77)$$

Hierbei sind die Buchstaben u, v, w den Ebenen 3, 4, 5 zugeordnet und beim zyklischen Weitergehen $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ entsteht $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$. Wir haben dann

$$\begin{aligned} (c' \gamma')^{67} &= (6_{u_5} 7_{u_4} - 6_{u_4} 7_{u_5}) 6_{v_5} 6_{w_4} 7_{v_5} 7_{w_4} \text{ mit} \\ 6_{u_5} 7_{u_4} - 6_{u_4} 7_{u_5} &= (6B_5 3^3 A) (7B_4 3^3 A) - (6B_4 3^3 A) (7B_5 3^3 A) = \\ &= (B_5 B_4 3^3 A) \cdot (673^3 A) = -B \cdot (673^3 A), \end{aligned}$$

bekommen also die Gleichungen

$$\begin{cases} (c' \gamma')^{67} = -B \cdot (673^3 A) 6_{v_5} 6_{w_4} 7_{v_5} 7_{w_4} = -B (673^3 A) 6_{v_5} 6_{w_4} 7_{v_5} 7_{w_4} \\ (d' \delta')^{67} = -B \cdot (674^3 A) 6_{u_5} 6_{w_5} 7_{u_5} 7_{w_5} = -B (674^3 A) 6_{u_5} 6_{w_5} 7_{u_5} 7_{w_5} \\ (e' \eta')^{67} = -B \cdot (675^3 A) 6_{u_4} 6_{v_5} 7_{u_4} 7_{v_5} = -B (675^3 A) 6_{u_4} 6_{v_5} 7_{u_4} 7_{v_5} \end{cases} \quad (78)$$

Für die Determinanten (72) erhält man jetzt z. B.

$$d_3' = \text{Det.} \begin{vmatrix} U_{533}^{(6)} & U_{554}^{(7)} & U_{454}^{(8)} \end{vmatrix} = U_{533}^{(6)} (c' \gamma')^{78} + U_{533}^{(7)} (c' \gamma')^{86} + U_{533}^{(8)} (c' \gamma')^{67},$$

also nach (78):

$$d_3' = -B \cdot \{ (783^3 A) 6_{u_5} 6_{w_5} 7_{v_5} 8_{v_5} + (863^3 A) 6_{v_5} 7_{u_5} 8_{v_5} + (673^3 A) 6_{v_5} 7_{v_5} 8_{u_5} \}.$$

Hier formen wir das erste Glied rechts um nach der Formel

$$(783^3 A) 6_{u_5} = (683^3 A) 7_{u_5} - (673^3 A) 8_{u_5}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \{ d_3' = -B \{ & (863^3 A) [6_{v_5} 7_{u_5} 8_{v_5} 8_{v_5} - 6_{v_5} 7_{u_5} 8_{v_5} 8_{v_5}] + \\ & + (673^3 A) [6_{v_5} 7_{v_5} 8_{u_5} 8_{v_5} - 6_{v_5} 7_{v_5} 8_{u_5} 8_{v_5}] \} \end{aligned} \quad (79)$$

Die Summe in der ersten eckigen Klammer wird

$$(6_{v_5} 7_{v_5} - 6_{v_5} 7_{v_5}) 7_{u_5} 8_{v_5}$$

und die runde Klammer gibt hier wegen

$$\begin{aligned} 6_{v_5} 7_{v_5} &= 6_{v_5} 7_{v_5} + (674^3 A) \cdot B \text{ und } 6_{w_5} 7_{w_5} = 6_{w_5} 7_{w_5} - (675^3 A) \cdot B: \\ B (674^3 A) 6_{w_5} 7_{w_5} &+ (6_{w_5} 7_{w_5} - 6_{w_5} 7_{w_5}) 6_{v_5} 7_{v_5} = \\ &= B \cdot [(674^3 A) 6_{w_5} 7_{w_5} - (675^3 A) 6_{v_5} 7_{v_5}]. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise läßt sich bei der zweiten eckigen Klammer von (79) der Faktor B herausholen, so daß man schließlich erhält:

$$\begin{aligned} \{ d_3' = -B^2 \cdot \{ & (863^3 A) (674^3 A) 6_{w_5} 7_{w_5} 8_{v_5} - (863^3 A) (675^3 A) 6_{v_5} 7_{v_5} 8_{u_5} + \\ & + (864^3 A) (673^3 A) 6_{w_5} 7_{v_5} 8_{u_5} - (865^3 A) (673^3 A) 6_{v_5} 7_{v_5} 8_{u_5} \} = -B^2 \cdot d_3 \end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für die weiteren Größen $c_4'', \gamma_4'', \dots$. Alle diese Komitanten $c_4'' \dots$ sind vom zwölften Grade in der Reihe A .

Mit den Abkürzungen (76) lassen sich die zwölf Invarianten F_{ijk} von (42) so schreiben:

$$F_{443} = (F_4 u_4') \quad F_{453} = (F_4 u_5') \quad F_{543} = (F_5 u_4') \quad F_{553} = (F_5 u_5') \text{ usw. (81)}$$

§ 10. Die Geraden A, M, N .

Greifen wir zurück auf die durch (62) und (63) gegebenen Kegelschnitte Q_i ! Sie haben alle drei den Punkt B_{345} gemeinsam und wir wollen jetzt zeigen, daß sich Linearkombinationen der Q_i mit konstanten, d. h. von den X_i unabhängigen Koeffizienten bilden lassen, die den Faktor L_i (vgl. (52)) enthalten. Der Ansatz

$$l_3 Q_3 + l_4 Q_4 + l_5 Q_5 = L_3 A = (DX_4 - EX_5)(\lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda_5 X_5) \quad (82)$$

führt nämlich durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $X_i X_j$ links rechts auf sechs lineare Gleichungen zwischen den l_i und λ_i , die genau eine Lösung zulassen.

Nehmen wir neben (82) auch noch Ansätze mit L_4 und L_5 als Faktoren rechter Hand, so haben wir die Gleichungen

$$\begin{cases} l_3 Q_3 + l_4 Q_4 + l_5 Q_5 = L_3 A = (DX_4 - EX_5)(\lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda_5 X_5) \\ m_3 Q_3 + m_4 Q_4 + m_5 Q_5 = L_4 M = (EX_5 - CX_3)(\mu_3 X_3 + \mu_4 X_4 + \mu_5 X_5) \\ n_3 Q_3 + n_4 Q_4 + n_5 Q_5 = L_5 N = (CX_3 - DX_4)(\nu_3 X_3 + \nu_4 X_4 + \nu_5 X_5) \end{cases} \quad (83)$$

mit den Lösungen:

$$\begin{cases} l_3 = D\bar{c}_4 d_5 - E\bar{c}_5 \eta_4 & l_4 = d_5 (E \eta_3 + D d_3) & l_5 = -\eta_4 (E \eta_3 + D d_3) \\ m_3 = -\gamma_5 (C \gamma_4 + E e_4) & m_4 = E \bar{d}_5 e_3 - C \bar{d}_3 \gamma_5 & m_5 = e_3 (C \gamma_4 + E e_4) \\ n_3 = c_4 (D \delta_5 + C c_5) & n_4 = -\delta_3 (D \delta_5 + C c_5) & n_5 = C c_4 \bar{e}_3 - D \bar{e}_4 \delta_3 \end{cases} \quad (84)$$

$$\begin{cases} D\lambda_3 = l_3 C \eta_3 + l_4 D e_4 - l_5 (D \bar{d}_5 + C \bar{c}_5) \\ E\mu_3 = * - m_4 E \eta_4 - m_5 E d_5 \\ C\nu_3 = * - n_4 C \eta_4 + n_5 C d_5 \end{cases} \quad \begin{cases} D\lambda_4 = l_3 D e_3 * + l_5 D \gamma_5 \\ E\mu_4 = -m_3 (E \bar{e}_3 + D \bar{d}_3) + m_4 D \gamma_4 + m_5 E c_5 \\ C\nu_4 = -n_3 C e_3 * - n_5 C \gamma_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D\lambda_5 = -l_3 D \delta_3 - l_4 D c_4 * \\ E\mu_5 = m_3 E \delta_3 + m_4 E c_4 * \\ C\nu_5 = n_3 C d_3 - n_4 (C \bar{c}_4 + E e_4) + n_5 E \delta_5 \end{cases} \quad (85)$$

Hierbei ist der Kürze halber

$$\bar{c}_4 = c_4 + \gamma_4, \quad \bar{c}_5 = c_5 + \gamma_5, \quad \bar{d}_3 = d_3 + \delta_3, \text{ etc.} \quad (86)$$

gesetzt. Wir bemerken, daß sich das zyklische Weitergehen $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ jetzt überträgt auf die Buchstaben

$$l \rightarrow m \rightarrow n \rightarrow l \text{ und } \lambda \rightarrow \mu \rightarrow \nu \rightarrow \lambda;$$

das Weitergehen bei Buchstaben und Indizes sieht dann so aus:

$$l_3 \rightarrow m_4 \rightarrow n_5 \rightarrow l_3, \lambda_4 \rightarrow \mu_5 \rightarrow \nu_3 \rightarrow \lambda_4, \text{ etc.} \quad (87)$$

In (83), (84) und (85) entstehen die zweite und die dritte Gleichung aus der ersten durch zyklisches Weitergehen.

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen (62) der Reihe nach mit

$$l_3 X_4 X_5, l_4 X_5 X_3 \text{ und } l_5 X_3 X_4$$

und addieren, so entsteht nach (83) $X_3 X_4 X_5 \cdot L_3 \Delta$. Die analoge Rechnung mit m_i und n_i ausgeführt, liefert so die drei Beziehungen:

$$\begin{cases} \sum_{678} T_{3456} [X_4 X_5 l_3 (c\gamma)^{78} + X_5 X_3 l_4 (d\delta)^{78} + X_3 X_4 l_5 (e\eta)^{78}] = X_3 X_4 X_5 L_3 \Delta \\ \sum_{678} T_{3456} [X_4 X_5 m_3 (c\gamma)^{78} + X_5 X_3 m_4 (d\delta)^{78} + X_3 X_4 m_5 (e\eta)^{78}] = X_3 X_4 X_5 L_4 M \\ \sum_{678} T_{3456} [X_4 X_5 n_3 (c\gamma)^{78} + X_5 X_3 n_4 (d\delta)^{78} + X_3 X_4 n_5 (e\eta)^{78}] = X_3 X_4 X_5 L_5 N \end{cases} \quad (88)$$

Diese Gleichungen bringen zum Ausdruck, daß im homogenen Polynomideal (T_{3456} , T_{3457} , T_{3458}) Formen fünften Grades existieren, die vollständig in Linearformen der X_i zerfallen. Auf dieser Tatsache beruht dann die weitere: Wenn drei ebene Kurven dritter Ordnung vier Punkte gemein haben, so läßt sich die Bedingung, daß sie auch noch einen fünften Schnittpunkt gemein haben, zurückführen auf die: daß drei rational-bekannte Geraden durch denselben Punkt gehen.

Für die Koeffizientendeterminante der linken Seiten von (88) findet man

$$\Delta T = X_3^2 X_4^2 X_5^2 \cdot \Delta_l \cdot \Delta \quad (89)$$

wobei

$$\Delta_l = (lmn) = \begin{vmatrix} l_3 & l_4 & l_5 \\ m_3 & m_4 & m_5 \\ n_3 & n_4 & n_5 \end{vmatrix} \quad (90)$$

und Δ durch (65) gegeben ist.

Setzen wir die l_i , m_j und n_k von (84) in (85) ein, so ergeben sich bei Verwendung der Abkürzungen (86) für die λ , μ , ν die Gleichungen

$$\begin{cases} \lambda_3 = C (\bar{c}_4 d_5 \eta_3 + \bar{c}_5 d_3 \eta_4) + D (d_3 \bar{d}_5 \eta_4 + d_5 \bar{d}_3 e_4) + E (d_5 e_4 \eta_3 + \bar{d}_5 \eta_3 \eta_4) \\ \mu_3 = C (\bar{d}_3 \gamma_5 \eta_4 - \bar{d}_5 e_3 \gamma_4) - E (\bar{d}_5 e_3 \eta_4 + \bar{d}_5 e_3 e_4) \\ \nu_3 = C (c_4 \bar{d}_5 \bar{e}_3 - c_5 \delta_3 \eta_4) - D (d_5 \bar{e}_4 \delta_3 + \delta_5 \delta_3 \eta_4) \\ \lambda_4 = D (\bar{c}_4 \bar{d}_5 e_3 - \bar{d}_3 \eta_4 \gamma_5) - E (\bar{c}_5 e_3 \eta_4 + \eta_3 \eta_4 \gamma_5) \\ \mu_4 = C (e_5 e_3 \gamma_4 + \bar{e}_3 \gamma_4 \gamma_5) + D (\bar{d}_5 e_3 \gamma_4 + \bar{d}_3 e_4 \gamma_5) + E (\bar{e}_3 e_4 \gamma_5 + c_5 e_3 e_4) \\ \nu_4 = -C (c_4 \bar{e}_3 \gamma_5 + c_4 c_5 e_3) + D (\bar{e}_4 \gamma_5 \delta_5 - c_4 e_3 \delta_5) \end{cases} \quad (91)$$

$$\begin{cases} \lambda_5 = -D(\bar{c}_4 d_5 \delta_3 + c_4 \bar{d}_5 \delta_3) + E(\bar{c}_5 \delta_3 \eta_4 - c_4 \bar{d}_5 \eta_3) \\ \mu_5 = -C(c_4 \bar{d}_3 \gamma_5 + \gamma_4 \gamma_5 \delta_3) + E(c_4 \bar{d}_5 e_3 - c_4 \gamma_5 \delta_3) \\ \nu_5 = C(\bar{c}_4 c_5 \delta_3 + c_4 c_5 \bar{d}_3) + D(c_4 \bar{d}_3 \delta_5 + \bar{c}_4 \delta_5 \delta_3) + E(c_4 \bar{e}_3 \delta_5 + c_5 \bar{e}_4 \delta_3) \end{cases}$$

Sondert man aus den Größen $c_4, d_5, \dots$ nach (73) die Faktoren C, D und E ab, geht also zu den $c'_4, d'_5, \dots$ über, so kommt statt (84)

$$\begin{cases} l_3 = C^3 D^4 E^4 \cdot l'_3 & l_4 = C^3 D^4 E^4 \cdot l'_4 & l_5 = C^3 D^4 E^4 \cdot l'_5 \\ m_3 = C^4 D^3 E^4 \cdot m'_3 & m_4 = C^4 D^3 E^4 \cdot m'_4 & m_5 = C^4 D^3 E^4 \cdot m'_5 \quad (\text{vgl. (94)}) \\ n_3 = C^4 D^4 E^3 \cdot n'_3 & n_4 = C^4 D^4 E^3 \cdot n'_4 & n_5 = C^4 D^4 E^3 \cdot n'_5 \end{cases} \quad (92)$$

Hieraus folgt, daß man in der Determinante Δ_l den Faktor $(CDE)^{11}$ abspalten kann:

$$\Delta_l = (CDE)^{11} \Delta'_l = C^{11} D^{11} E^{11} \cdot (l' m' n') \quad (93)$$

mit

$$\begin{aligned} l'_3 &= D^2 c'_4 d'_5 + DE d'_5 \gamma'_4 - DE c'_5 \eta'_4 - E^2 \eta'_4 \gamma'_5 \\ m'_3 &= -E^2 e'_4 \gamma'_5 - EC \gamma'_4 \gamma'_5 \\ n'_3 &= CD c'_4 c'_5 + D^2 c'_4 \delta'_5 \\ l'_4 &= DE \bar{d}'_3 d'_5 + E^2 d'_5 \eta'_3 \\ m'_4 &= E^2 d'_5 e'_3 + EC e'_3 \delta'_5 - EC d'_3 \gamma'_5 - C^2 \delta'_3 \gamma'_5 \\ n'_4 &= -C^2 c'_5 \delta'_3 - CD \delta'_5 \delta'_3 \\ l'_5 &= -D^2 d'_3 \eta'_4 - DE \eta'_3 \eta'_4 \\ m'_5 &= EC e'_3 e'_4 + C^2 e'_3 \gamma'_4 \\ n'_5 &= C^2 c'_4 e'_3 + CD c'_4 \eta'_3 - CD e'_4 \delta'_3 - D^2 \delta'_3 \eta'_4 \end{aligned} \quad (94)$$

Aus c_4 entstehen durch zyklisches Weitergehen d_5 und e_3 ; für das Produkt dieser drei Größen führen wir die Abkürzung $\hat{c}_4$ ein, setzen also

$$c_4 = c_4 d_5 e_3, \quad \hat{c}'_5 = c'_5 \bar{d}'_3 e'_4, \quad \hat{\gamma}'_4 = \gamma_4 \delta_5 \eta_3, \quad \text{etc.} \quad (95)$$

Mit dieser Bezeichnung haben wir aus (84) (Σ = zyklische Summe):

$$\Delta_l = \begin{cases} CDE \cdot \{ \hat{c}_4 (\hat{c}_4 + \hat{c}_5) - \hat{\gamma}_5 (\hat{\gamma}_4 + \hat{\gamma}_5) + 2 \hat{c}_4 \hat{\gamma}_4 - 2 \hat{c}_5 \hat{\gamma}_5 + (\hat{c}_4 - \hat{\gamma}_5) [\Sigma \bar{c}_4 e_3 \delta_5 + \\ \quad + \Sigma \bar{c}_5 d_3 \eta_4] + \Delta \cdot [\Sigma e_3 \delta_5 \delta_3 \eta_4 - \Sigma d_5 e_3 e_4 \delta_3] \} + \\ + \Sigma CD^2 \{ \bar{c}_4 d_5 d_3 \bar{e}_4 \gamma_5 \delta_3 + \bar{c}_4 d_5 e_3 \gamma_4 \delta_5 \delta_3 + c_4 d_5 d_3 e_3 \gamma_4 \delta_5 - d_5 d_3 \bar{e}_4 \gamma_5 \gamma_4 \delta_3 - \\ \quad - d_3 \gamma_4 \gamma_5 \delta_5 \delta_3 \eta_4 - c_4 d_3 \bar{d}_3 \gamma_5 \delta_5 \eta_4 \} + \\ + \Sigma CE^2 \cdot \{ -c_4 \bar{c}_5 \bar{d}_5 e_3 e_3 \eta_4 - c_5 \bar{c}_5 e_3 e_4 \delta_3 \eta_4 + c_4 c_5 \bar{d}_5 e_3 e_4 \eta_3 + \\ \quad + c_4 d_5 e_4 \bar{e}_3 \gamma_5 \eta_3 - c_5 e_4 \gamma_5 \delta_3 \eta_4 + c_4 c_5 \bar{d}_5 e_3 \eta_3 \eta_4 \}. \end{cases} \quad (96)$$

Der Übergang von $c_4, \dots$ zu $c'_4, \dots$ gibt bei (91):

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 = C^4 D^6 E^6 \cdot \lambda'_3 \quad \lambda_4 = C^5 D^5 E^6 \cdot \lambda'_4 \quad \lambda_5 = C^5 D^6 E^5 \cdot \lambda'_5 \quad (\text{die } \lambda'_3, \mu'_4, \dots \\ \mu_3 = C^5 D^5 E^6 \cdot \mu'_3 \quad \mu_4 = C^6 D^4 E^6 \cdot \mu'_4 \quad \mu_5 = C^6 D^5 E^5 \cdot \mu'_5 \quad \text{sind in den Gleichungen (100)} \\ \nu_3 = C^5 D^6 E^5 \cdot \nu'_3 \quad \nu_4 = C^6 D^5 E^5 \cdot \nu'_4 \quad \nu_5 = C^6 D^6 E^4 \cdot \nu'_5 \quad \text{ausgeschriebenen.) (97)} \end{array} \right.$$

Wir können also für die Determinante

$$\Delta_\lambda = (\lambda \mu \nu) = \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 \end{vmatrix} \quad (98)$$

schreiben:

$$\Delta_\lambda = (CDE)^{16} \cdot \Delta'_\lambda, \quad (99)$$

wobei $\Delta'_\lambda = \Delta_\lambda' = (\lambda' \mu' \nu')$ gesetzt ist. Die Elemente dieser Determinante werden nach (91) (der Akzent bei allen $c_i, \gamma_k, \dots$ ist weggelassen!):

$$\begin{aligned} \lambda'_3 &= C^2 D (c_4 d_5 \eta_3 + c_5 d_3 \eta_4) + C^2 E (d_5 \gamma_4 \eta_3 + d_3 \gamma_5 \eta_4) + CD^2 d_3 d_5 \eta_4 + \\ &\quad + CE^2 d_5 e_4 \eta_3 + D^2 E d_5 d_3 \eta_4 + DE^2 d_5 \eta_3 \eta_4 + CDE (d_5 d_3 e_4 + d_5 \eta_3 \eta_4) \\ \lambda'_4 &= CD^2 c_4 d_5 e_3 - D^2 E d_3 \gamma_5 \eta_4 - CE^2 e_3 \gamma_5 \eta_4 - DE^2 \gamma_5 \eta_3 \eta_4 + CDE (d_5 e_3 \gamma_4 - \\ &\quad - c_5 e_3 \eta_4) \\ \lambda'_5 &= -CD^2 c_4 d_5 \delta_3 - D^2 E c_4 d_5 d_3 + CE^2 \gamma_5 \delta_3 \eta_4 - DE^2 c_4 d_5 \eta_3 + CDE (c_5 \delta_3 \eta_4 - \\ &\quad - d_5 \gamma_4 \delta_3) \\ \mu'_3 &= -DE^2 d_5 e_3 \eta_4 - CE^2 d_5 e_3 e_4 + C^2 D \gamma_5 \delta_3 \eta_4 - C^2 E d_5 e_3 \gamma_4 + CDE (d_3 \gamma_5 \eta_4 - \\ &\quad - e_3 \delta_5 \eta_4) \\ \mu'_4 &= D^2 E (d_5 e_3 \gamma_4 + d_3 e_4 \gamma_5) + CD^2 (e_3 \delta_3 \gamma_4 + e_4 \delta_3 \gamma_5) + CE^2 e_3 e_4 \gamma_5 + \\ &\quad + DE^2 e_4 \gamma_5 \eta_3 + C^2 D c_5 e_3 \gamma_4 + C^2 E e_3 \gamma_4 \gamma_5 + CDE (c_5 e_3 e_4 + \gamma_4 \gamma_5 \eta_3) \\ \mu'_5 &= DE^2 c_4 d_5 e_3 - CE^2 e_4 \gamma_5 \delta_3 - C^2 D c_4 \gamma_5 \delta_3 - C^2 E \gamma_4 \gamma_5 \delta_3 + CDE (c_4 e_3 \delta_5 - c_4 d_3 \gamma_5) \\ \nu'_3 &= C^2 E c_4 d_5 e_3 - C^2 D c_5 \delta_3 \eta_4 - D^2 E d_5 \delta_3 \eta_4 - CD^2 \delta_5 \delta_3 \eta_4 + CDE (c_4 d_5 \eta_3 - d_5 e_4 \delta_3) \\ \nu'_4 &= -C^2 E c_4 e_3 \gamma_5 - C^2 D c_4 c_5 e_3 + D^2 E \gamma_5 \delta_3 \eta_4 - CD^2 c_4 e_3 \delta_5 + CDE (e_4 \gamma_5 \delta_3 - c_4 \gamma_5 \eta_3) \\ \nu'_5 &= CE^2 (c_4 e_3 \delta_5 + c_5 e_4 \delta_3) + DE^2 (c_4 d_5 \eta_3 + c_5 \delta_3 \eta_4) + C^2 D c_4 c_5 \delta_3 + \\ &\quad + C^2 E c_5 \gamma_4 \delta_3 + D^2 E c_4 d_3 \delta_5 + CD^2 c_4 d_5 \delta_3 + CDE (c_4 c_5 d_3 + \gamma_4 \delta_5 \delta_3). \end{aligned} \quad (100)$$

§ 11. Die Invarianten Φ_i .

Das Verschwinden der drei Formen T_{3456} , T_{3457} und T_{3458} (vgl. (58)) hat nach (88) die drei Gleichungen zur Folge:

$$X_3 X_4 X_5 L_3 A = 0, \quad X_3 X_4 X_5 L_4 M = 0 \quad \text{und} \quad X_3 X_4 X_5 L_5 N = 0. \quad (101)$$

Wenn also ein Punkt B^* in 2^3 existiert, der allen drei Kurven dritter Ordnung $T_{345i} = 0$ ($i = 6, 7, 8$) gemeinsam ist, so muß er unter den Schnittpunkten der Geraden (101) zu suchen sein. Mit anderen Worten: die Bedingung dafür, daß die drei Kurven $T_{345i} = 0$ noch einen Punkt B^*

gemein haben, erfordert in erster Linie, daß drei der Geraden (101) durch einen Punkt gehen.

Von diesen Geraden sind vorerst die Seiten $X_i=0$ des Koordinatendreieckes auszuschließen. Gilt nämlich z. B. $X_4=0$ und $X_5=0$, so ist $B^*=B_3$, also allen Kurven $T_{345\pi}$ gemeinsam. Ist $X_3=0$, X_4 und $X_5 \neq 0$, so folgt aus (56)

$$c^i L_4 - \gamma^i L_5 = 0 \quad (i = 6, 7, 8), \quad (102)$$

d. h. also, wir hätten wegen $L_4 L_5 \neq 0$ (da sonst wieder $B^*=B_4$ oder $=B_5$ wäre)

$$(c\gamma)^{78} = (c\gamma)^{86} = (c\gamma)^{67} = 0. \quad (103)$$

Dies gibt zwei Bedingungen für den Punkt A in der Ebene 1^3 . Bei einer neunten Ebene 9^3 würden wir zwei weitere Bedingungen erhalten, also im Allgemeinen keinen Punkt A durch den eine Transversalebene $T_{12 \dots 89}$ geht.

Wir können also $X_i \neq 0$ voraussetzen. Für einen Punkt B^* bleiben dann an Stelle von (101) die Gleichungen

$$L_3 A = 0, L_4 M = 0 \text{ und } L_5 N = 0. \quad (104)$$

Sind zwei der L_i Null, so folgt $B^*=B_{345}$. Es bleiben daher nur noch die vier Möglichkeiten:

$$\begin{cases} \Phi_3 = (L_3 MN) = 0 \\ \Phi_4 = (L_4 NA) = 0 \text{ und } \Delta_\lambda = (\Delta MN) = 0. \\ \Phi_5 = (L_5 AM) = 0 \end{cases} \quad (105)$$

Nach (83) haben wir für diese Größen Φ_i :

$$\begin{cases} \Phi_3 = (L_3 MN) = & * & D(\mu\nu)_{53} - E(\mu\nu)_{34} \\ \Phi_4 = (L_4 NA) = -C(\nu\lambda)_{45} & * & + E(\nu\lambda)_{34} \\ \Phi_5 = (L_5 AM) = & C(\lambda\mu)_{45} - D(\lambda\mu)_{53} & * \end{cases} \quad (106)$$

Durch Ausrechnen dieser Ausdrücke nach (91) und Vergleichen mit dem durch (96) gegebenen Δ_l findet man:

$$\Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = \Delta_l. \quad (107)$$

Wir sehen also: bei $\Delta_l = 0$ verschwinden auch die Φ_i , d. h. es schneiden sich die Paare von Geraden (M, N) , (N, A) und (A, M) , resp. auf den Geraden L_3 , L_4 und L_5 . Die zwei Dreiecke $B_3 B_4 B_5$ und $A M N$ liegen dann perspektivisch. Nach dem Satze von *Desargues* liegen also auch die drei Punkte

$$S_3 = (L_3 A), S_4 = (L_4 M) \text{ und } S_5 = (L_5 N)$$

auf einer Geraden. Als Koordinaten von S_3 (= Schnittpunkt von $X_3 = 0$ mit $A = 0$) haben wir $0 : -\lambda_5 : \lambda_4$; hieraus findet man

$$S = (S_3 S_4 S_5) = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda_5 & \lambda_4 \\ \mu_5 & 0 & -\mu_3 \\ -\nu_4 & \nu_3 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_4 \mu_5 \nu_3 - \lambda_5 \mu_3 \nu_4 = \hat{\lambda}_4 - \hat{\lambda}_5. \quad (108)$$

Diese Größe muß also mit Δ_l gleichzeitig Null sein.

Um dies zu beweisen und gleichzeitig einen einfachen Beweis von (107) zu liefern, führen wir in der Ebene 2^3 an Stelle der Koordinaten X_i neue $\bar{X}_i$ ein durch die folgende lineare Transformation:

$$\begin{cases} X_3 = \bar{X}_3 \\ X_4 = \frac{C}{D} \bar{X}_3 - \frac{1}{D} \bar{X}_4 \\ X_5 = \frac{C}{E} \bar{X}_3 + \frac{1}{E} \bar{X}_5 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{X}_3 = X_3 \\ \bar{X}_4 = CX_3 - DX_4 \\ \bar{X}_5 = -CX_3 + EX_5 \end{cases} \quad (109)$$

Dies bedeutet, daß wir an Stelle des Koordinatendreiecks $B_3 B_4 B_5$ das Dreieck $B_{345} B_4 B_5$ nehmen, so daß also auch

$$\bar{X}_4 = L_5, \quad \bar{X}_5 = L_4, \quad -\bar{X}_4 - \bar{X}_5 = L_3$$

wird.

Die λ_i , μ_j und ν_k transformieren sich dann contragredient zu (109), d. h. wir haben

$$\begin{cases} \lambda_3 = \bar{\lambda}_3 + C \bar{\lambda}_4 - C \bar{\lambda}_5 \\ \lambda_4 = -D \bar{\lambda}_4 \\ \lambda_5 = E \bar{\lambda}_5 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\lambda}_3 = \lambda_3 + \frac{C}{D} \lambda_4 + \frac{C}{E} \lambda_5 \\ \bar{\lambda}_4 = -\frac{1}{D} \lambda_4 \\ \bar{\lambda}_5 = \frac{1}{E} \lambda_5 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(und ebenso für} \\ \mu \leftrightarrow \bar{\mu} \text{ und } \nu \leftrightarrow \bar{\nu}). \end{matrix} \quad (110)$$

Bei diesen Transformationen (109) gehen die Kegelschnitte $Q_i(X)$ (vgl. § 8, Gleichung (63)) über in drei Kegelschnitte K_a , K_α und K_m , die alle drei durch den Punkt $(1:0:0)$ des neuen Koordinatensystems gehen und deren Gleichung daher von der Gestalt wird

$$K_a = a_{44} \bar{X}_4^2 + a_{55} \bar{X}_5^2 + 2 a_{45} \bar{X}_4 \bar{X}_5 + 2 a_{53} \bar{X}_5 \bar{X}_3 + 2 a_{34} \bar{X}_3 \bar{X}_4 = 0 \quad (111)$$

1)
2)
3)
4)
5)

Der Zusammenhang zwischen den a_{ik} und den Koeffizienten von Q_i (vgl. (63)) wird dann gegeben durch die Beziehungen

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{44} = \frac{1}{D} e_3 \\ a_{55} = \frac{1}{E} \delta_3 \\ a_{45} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D} \bar{e}_3 + \frac{1}{E} \bar{d}_3 \right) \\ a_{53} = \frac{1}{2} \left(-\frac{C}{D} \bar{e}_3 + \frac{C}{E} \delta_3 \right) \\ a_{34} = \frac{1}{2} \left(-\frac{C}{D} e_3 + \frac{C}{E} \bar{d}_3 \right) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{44} = 0 \\ \alpha_{55} = \frac{1}{E} c_4 \\ \alpha_{45} = -\frac{1}{2E} \gamma_4 \\ \alpha_{53} = -\frac{1}{2} \bar{e}_4 + \frac{C}{2E} c_4 \\ \alpha_{34} = -\frac{1}{2} e_4 - \frac{C}{2E} \gamma_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} m_{44} = +\frac{1}{D} \gamma_5 \\ m_{55} = 0 \\ m_{45} = -\frac{1}{2D} c_5 \\ m_{53} = \frac{1}{2} \delta_5 + \frac{C}{2D} c_5 \\ m_{34} = \frac{1}{2} \bar{d}_5 - \frac{C}{2D} \gamma_5 \end{array} \right\} \quad (112)$$

Dem Ansatz (83) entspricht in den neuen Koordinaten $\bar{X}$ das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma l_3 K_a = (-\bar{X}_4 - \bar{X}_5) \cdot \bar{A} = (-\bar{X}_4 - \bar{X}_5) \cdot (\bar{\lambda}_3 \bar{X}_3 + \bar{\lambda}_4 \bar{X}_4 + \bar{\lambda}_5 \bar{X}_5) \\ \Sigma \bar{m}_3 K_a = \bar{X}_5 \cdot \bar{M} = \bar{X}_5 \cdot (\bar{\mu}_3 \bar{X}_3 + \bar{\mu}_4 \bar{X}_4 + \bar{\mu}_5 \bar{X}_5) \\ \Sigma \bar{n}_3 K_a = \bar{X}_4 \cdot \bar{N} = \bar{X}_4 \cdot (\bar{\nu}_3 \bar{X}_3 + \bar{\nu}_4 \bar{X}_4 + \bar{\nu}_5 \bar{X}_5) \end{array} \right\} \quad (113)$$

wobei sich links das Zeichen Σ auf a_{ik} , α_{ik} und m_{ik} bezieht.

Aus (113) erhalten wir

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma l_3 a_{44} = -\bar{\lambda}_4 \\ \Sigma l_3 a_{55} = -\bar{\lambda}_5 \\ \Sigma l_3 \cdot 2a_{45} = -\bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_5 \\ \Sigma l_3 \cdot 2a_{53} = -\bar{\lambda}_3 \\ \Sigma l_3 \cdot 2a_{34} = -\bar{\lambda}_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \bar{m}_3 a_{44} = 0 \\ \Sigma \bar{m}_3 a_{55} = \bar{\mu}_5 \\ \Sigma \bar{m}_3 \cdot 2a_{45} = \bar{\mu}_4 \\ \Sigma \bar{m}_3 \cdot 2a_{53} = \bar{\mu}_3 \\ \Sigma \bar{m}_3 \cdot 2a_{34} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \bar{n}_3 a_{44} = \bar{\nu}_4 \\ \Sigma \bar{n}_3 a_{55} = 0 \\ \Sigma \bar{n}_3 \cdot 2a_{45} = \bar{\nu}_5 \\ \Sigma \bar{n}_3 \cdot 2a_{53} = 0 \\ \Sigma \bar{n}_3 \cdot 2a_{34} = \bar{\nu}_3 \end{array} \right\} \quad (114)$$

und hieraus finden wir⁴ für die $\bar{m}$, $\bar{n}$ und $\bar{l}$ (vgl. (84)):

$$\left\{ \begin{array}{l} l_3 : l_4 : l_5 = -DE \cdot \left\| \begin{array}{ccc} a_{44} + a_{55} - 2a_{45} & \alpha_{44} + \alpha_{55} - 2\alpha_{45} & m_{44} + m_{55} - 2m_{45} \\ 2a_{53} - 2a_{34} & 2\alpha_{53} - 2\alpha_{34} & 2m_{53} - 2m_{34} \end{array} \right\| = l_3 : l_4 : l_5 \\ \bar{m}_3 : \bar{m}_4 : \bar{m}_5 = -DE \cdot \left\| \begin{array}{ccc} a_{44} & \alpha_{44} & m_{44} \\ 2a_{34} & 2\alpha_{34} & 2m_{34} \end{array} \right\| = m_3 : m_4 : m_5 \\ \bar{n}_3 : \bar{n}_4 : \bar{n}_5 = +DE \cdot \left\| \begin{array}{ccc} a_{55} & \alpha_{55} & m_{55} \\ 2a_{53} & 2\alpha_{53} & 2m_{53} \end{array} \right\| = n_3 : n_4 : n_5 \end{array} \right\} \quad (115)$$

Halten wir jetzt die fünf Koeffizienten a_{ik} von K_a durch die Ziffern 1 bis 5 fest (so wie unter Gleichung (111) angedeutet) und bilden ternäre Klammerfaktoren (ijk) mit diesen fünf Ziffern, d. h. setzen wir

⁴ Die $\bar{l}_i$, $\bar{m}_i$ und $\bar{n}_i$ sind nur bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt; dieser ist in (115) so gewählt, daß $\bar{l}_i = l_i$, $\bar{m}_i = m_i$ und $\bar{n}_i = n_i$ wird.

$$(123) = \begin{vmatrix} \alpha_{44} & \alpha_{44} & m_{44} \\ \alpha_{55} & \alpha_{55} & m_{55} \\ \alpha_{45} & \alpha_{45} & m_{45} \end{vmatrix}, \quad (245) = \begin{vmatrix} \alpha_{55} & \alpha_{55} & m_{55} \\ \alpha_{53} & \alpha_{53} & m_{53} \\ \alpha_{34} & \alpha_{34} & m_{34} \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}, \quad (116)$$

so ergeben sich aus (114) und (115) für die neuen $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ und $\bar{\nu}$:

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_3 = 4 DE [(145) + (245) - 2 (345)] \\ \bar{\lambda}_4 = 2 DE [(241) + (215) - 2 (341) - 2 (315)] \\ \bar{\lambda}_5 = 2 DE [-(241) - (215) + 2 (324) + 2 (352)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_3 = -4 DE (154) \\ \bar{\mu}_4 = -4 DE (153) \\ \bar{\mu}_5 = -2 DE (152) \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\nu}_3 = +4 DE (245) \\ \bar{\nu}_4 = +2 DE (241) \\ \bar{\nu}_5 = +4 DE (243) \end{cases} \quad (117)$$

Nach (115) wird jetzt

$$\Delta_l = \Delta_{\bar{l}} = (lmn) = +8 D^3 E^3 [-(152) (245) - (154) (241) + 2 (153) (245) + 2 (154) (243)], \quad (118)$$

also nach (117):

$$\Delta_l = -DE \cdot [(\bar{\mu} \bar{\nu})_{35} - (\bar{\mu} \bar{\nu})_{34}]. \quad (119)$$

Andererseits ist nach (110) und wegen $\bar{L}_3 = -\bar{X}_4 - \bar{X}_5$:

$$\Phi_3 = (L_3 MN) = -DE (\bar{L}_3 \bar{M} \bar{N}) = -DE \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \bar{\mu}_3 & \bar{\mu}_4 & \bar{\mu}_5 \\ \bar{\nu}_3 & \bar{\nu}_4 & \bar{\nu}_5 \end{vmatrix} = -DE \cdot [(\bar{\mu} \bar{\nu})_{35} - (\bar{\mu} \bar{\nu})_{34}], \quad (120)$$

somit nach (119) $\Phi_3 = \Delta_l$, woraus sich durch zyklisches Weitergehen $\Phi_i = \Delta_l$ ergibt. Hiermit ist (107) bewiesen. Analog zu (120) erhalten wir überdies

$$\Phi_4 = -DE (\bar{\nu} \bar{\lambda})_{34} \quad \text{und} \quad \Phi_5 = -DE (\bar{\lambda} \bar{\mu})_{53},$$

so daß also auch

$$(\bar{\mu} \bar{\nu})_{35} - (\bar{\mu} \bar{\nu})_{34} = (\bar{\nu} \bar{\lambda})_{34} = (\bar{\lambda} \bar{\mu})_{53} = -1/DE \Delta_l \quad (121)$$

gilt, was man mit Hilfe der Gleichungen (117) leicht bestätigt.

§ 12. Die Determinanten Δ_l und Δ_{λ} .

Wir setzen

$$\begin{cases} A_0 = DE \lambda_3 + EC \lambda_4 + CD \lambda_5 \\ M_0 = DE \mu_3 + EC \mu_4 + CD \mu_5 \\ N_0 = DE \nu_3 + EC \nu_4 + CD \nu_5 \end{cases} \quad (122)$$

und können annehmen, daß diese Größen im allgemeinen Falle von Null verschieden sind. Denn $A_0 = 0$ würde z. B. bedeuten, daß die Gerade A durch den Punkt B_{345} geht; diesen Fall haben wir bei Gleichung (104) wegen $B^* \neq B_{345}$ ausgeschlossen.

Aus (110) finden wir dann:

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{A_0}{DE}, \quad \bar{\mu}_3 = \frac{M_0}{DE}, \quad \bar{\nu}_3 = \frac{N_0}{DE}. \quad (123)$$

Setzen wir dies in (121) ein, so lassen sich aus diesen Gleichungen $\bar{\lambda}_4$ und $\bar{\lambda}_5$ berechnen. Man erhält:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda}_4 = \frac{-\frac{1}{DE} \Delta_l + \bar{\lambda}_3 \bar{\nu}_4}{\bar{\nu}_3} = \frac{-\Delta_l + A_0 \bar{\nu}_4}{N_0} \\ \bar{\lambda}_5 = \frac{-\frac{1}{DE} \Delta_l + \bar{\lambda}_3 \bar{\mu}_5}{\bar{\mu}_3} = \frac{-\Delta_l + A_0 \bar{\mu}_5}{M_0} \end{array} \right. \quad (124)$$

Transformieren wir jetzt die durch (108) gegebene Komitante S , so kommt

$$S = -DE\bar{S} - CDE \cdot [\bar{\nu}_4 (\bar{\lambda} \bar{\mu})_{45} - \bar{\mu}_5 (\bar{\lambda} \bar{\nu})_{45}] \quad (125)$$

mit

$$\bar{S} = \bar{\lambda}_4 \bar{\mu}_5 \bar{\nu}_3 - \bar{\lambda}_5 \bar{\mu}_3 \bar{\nu}_4 = 1/DE \Delta_l (\bar{\mu}_5 - \bar{\nu}_4). \quad (126)$$

Die Elimination der überstrichenen Größen $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ und $\bar{\nu}$ aus den Gleichungen (123) bis (126) ergibt schließlich:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \cdot M_0 N_0 = \Delta_l [CA_0 \mu_5 \nu_4 + DM_0 \mu_5 \nu_3 + EN_0 \mu_3 \nu_4] \\ S \cdot N_0 A_0 = \Delta_l [CA_0 \nu_4 \lambda_5 + DM_0 \nu_3 \lambda_5 + EN_0 \nu_3 \lambda_4] \\ S \cdot A_0 M_0 = \Delta_l [CA_0 \lambda_4 \mu_5 + DM_0 \lambda_5 \mu_3 + EN_0 \lambda_4 \mu_3] \end{array} \right. \quad (127)$$

Hiermit ist die oben bemerkte Tatsache bewiesen, daß $\Delta_l = 0$ auch $S = 0$ nach sich zieht. Wir bemerken noch, daß die Koeffizientendeterminante der in CA_0 , DM_0 und EN_0 linearen Ausdrücke der eckigen Klammern gleich S^2 wird:

$$\begin{vmatrix} \mu_5 \nu_4 & \mu_5 \nu_3 & \mu_3 \nu_4 \\ \nu_4 \lambda_5 & \nu_3 \lambda_5 & \nu_3 \lambda_4 \\ \lambda_4 \mu_5 & \lambda_5 \mu_3 & \lambda_4 \mu_3 \end{vmatrix} = S^2. \quad (128)$$

Aus den Gleichungen (121) ergibt sich noch mit Benützung von (122):

$$\left\{ \begin{array}{lll} C \Delta_l = & * & \nu_3 M_0 - \mu_3 N_0 \\ D \Delta_l = -\nu_4 A_0 & * & + \lambda_4 N_0 \\ E \Delta_l = \mu_5 A_0 - \lambda_5 M_0 & * & \end{array} \right. \quad (129)$$

Hier ist die Koeffizientendeterminante rechts wieder die Komitante S .

Setzt man in $\Delta_{\bar{\lambda}} = (\bar{\lambda} \bar{\mu} \bar{\nu})$ die Ausdrücke (117) ein, so entsteht

$$\Delta_{\bar{\lambda}} = +16 D^3 E^3 \begin{vmatrix} 2(345) & (154) & (245) \\ -(152) + 2(134) & 2(153) & (241) \\ (241) - 2(235) & (152) & 2(243) \end{vmatrix}, \Delta_{\lambda} = -DE \cdot \Delta_{\bar{\lambda}}. \quad (130)$$

Wir haben im Ganzen $\binom{5}{3} = 10$ Klammerfaktoren (ijk) entsprechend den zehn homogenen Koordinaten einer Ebene im R_4 . Von diesen zehn Klammerfaktoren sind sieben willkürlich wählbar und die übrigen drei sind rational durch diese sieben ausdrückbar. Es ist unschwer zu zeigen, daß man als unabhängige (ijk) die folgenden wählen kann: Eine der Größen (123), (134), (235) oder (345), z. B. (345) und die sechs Größen (154), (153), (152); (245), (241) und (234),

d. h. also nach (117) die sieben Größen

$$\bar{\mu}_3, \bar{\mu}_4, \bar{\mu}_5; \bar{\nu}_3, \bar{\nu}_4, \bar{\nu}_5 \text{ und } (345). \quad (131)$$

Es ist dann, ebenfalls nach (117):

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_3 = \bar{\mu}_3 + \bar{\nu}_3 - 8 DE (345) \\ \bar{\lambda}_4 = \bar{\mu}_4 + \bar{\nu}_4 - \bar{\mu}_5 - 4 DE (341) \\ \bar{\lambda}_5 = \bar{\mu}_5 + \bar{\nu}_5 - \bar{\nu}_4 + 4 DE (352) \end{cases} \quad (132)$$

Setzt man hier

$$\begin{aligned} (341) &= \frac{(241)(345) - (154)(234)}{(245)} = \frac{-8 DE (345) \bar{\nu}_4 + \bar{\mu}_3 \bar{\nu}_5}{-4 DE \bar{\nu}_3} \text{ und} \\ (352) &= \frac{(153)(245) - (152)(345)}{(154)} = \frac{-\bar{\mu}_4 \bar{\nu}_3 + 8 DE (345) \bar{\mu}_5}{-4 DE \bar{\mu}_3} \end{aligned}$$

ein, so gibt schließlich eine einfache Rechnung die Gleichung

$$\Delta_{\bar{\lambda}} \cdot \bar{\mu}_3 \bar{\nu}_3 = -\bar{\nu}_3 (\bar{\mu} \bar{\nu})_{34}^2 - 8 DE (345) (\bar{\mu} \bar{\nu})_{34} (\bar{\mu} \bar{\nu})_{53} - \bar{\mu}_3 (\bar{\mu} \bar{\nu})_{53}^2. \quad (133)$$

Die Gleichung (121) oder

$$\Delta_l = [(\bar{\mu} \bar{\nu})_{34} + (\bar{\mu} \bar{\nu})_{53}] \cdot DE$$

zeigt dann, daß $\Delta_{\bar{\lambda}}$ und daher auch Δ_{λ} nicht durch Δ_l teilbar ist.

§ 13. Die Punkte A^* und A^{**} .

Bei festgehaltenem Punkt A in der Ebene 1^3 haben wir in der Ebene 2^3 eine Kurve dritter Ordnung (vgl. (18))

$$K_{3456}(A, B) = (AB3^3 6) (AB4^3 6) (AB5^3 6) = 0$$

als Ort der Punkte B = Schnittpunkt von 2^3 mit den möglichen Transversalebene T_{123456} . Zu drei Ebenen 6^3 , 7^3 und 8^3 bekommen wir die drei Kurven K_{345i} ($i = 6, 7, 8$), die durch die vier Punkte B_3, B_4, B_5 und B_{345} gehen und für die Existenz einer Transversalebene $T_{12 \dots 78}$ ist

notwendig, daß diese drei Kurven dritter Ordnung auch noch einen fünften Punkt B^* gemein haben. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer $T_{12 \dots 78}$ erhalten wir somit durch Elimination von B aus den drei Gleichungen

$$K_{345i}(A, B) = 0 \quad (i = 6, 7, 8).$$

Um diese Elimination wirklich durchrechnen zu können, benützen wir in 2^3 ein kovariantes Koordinatendreieck $B_3 B_4 B_5$ (vgl. (8)) unter der Voraussetzung, daß die Invariante B (vgl. (9)) nicht verschwindet.

Die Transformation der $K_{345\pi}$ auf dieses Dreieck gibt die Formen $K_{345\pi}(B)$ von Gleichung (30). Sie lassen sich mit Hilfe der Identität (32) auf die Gestalt $T_{345\pi}$ (Gleichungen (54) und (56)) bringen, an der unmittelbar abzulesen ist, daß diese Kurven dritter Ordnung durch die Punkte B_3, B_4, B_5 und B_{345} gehen. Bei den drei Kurven $T_{345i} = 0$ ($i = 6, 7, 8$) ist dann die Elimination der X_i (die den Punkt B in 2^3 angeben) auf ein lineares Problem zurückführbar, was durch die Identitäten (88) zum Ausdrucke kommt. Verschwinden die rechten Seiten dieser Gleichungen für einen Punkt B^* mit den ternären Koordinaten $Y_3 : Y_4 : Y_5$, so ist auch

$$T_{345i}(B^*) = 0 \quad (i = 6, 7, 8), \quad (134)$$

vorausgesetzt, daß die Determinante Δ_T von (89) nicht Null ist, was insbesondere die Ungleichungen (vgl. (65) und (90))

$$\Delta \neq 0, \Delta_l \neq 0 \quad (135)$$

nach sich zieht.

Die Gleichungen (104) liefern dann für die Existenz eines Punktes B^* die Möglichkeiten (105). Hiervon gibt die erstere, $\Phi_i = 0$, nach (107) gerade $\Delta_l = 0$, was nach (135) auszuschließen ist. Es bleibt also nur noch die zweite,

$$\Delta_\lambda = (\lambda \mu \nu) = 0. \quad (136)$$

Für veränderliche A gibt dies eine Kurve in der Ebene 1^3 , die durch die Ebenen $6^3, 7^3$ und 8^3 bestimmt wird, was wir durch

$$\Delta_\lambda^{678}(A^*) = 0$$

andeuten können. Diese Kurve ist der geometrische Ort derjenigen Punkte A^* von 1^3 , durch die Transversalebene $T_{12 \dots 78}$ gehen. Eine analoge Bedeutung hat $\Delta_\lambda^{679}(A^*) = 0$ und die Punkte A^{**} von 1^3 , durch die Transversalebene $T_{12 \dots 789}$ gehen, sind also unter den Schnittpunkten dieser beiden Kurven

$$\Delta_{\lambda}^{678}(A^*) = 0, \Delta_{\lambda}^{679}(A^*) = 0 \quad (137)$$

zu suchen.

Wenn (136) gilt, also

$$\Delta_{\lambda}^{678} = \Delta_{\lambda} = (\lambda \mu \nu) = 0$$

ist, so sind

$$Y_3 = (\mu \nu)_{45}, \quad Y_4 = (\mu \nu)_{53} \quad \text{und} \quad Y_5 = (\mu \nu)_{34} \quad (138)$$

die ternären Koordinaten des Punktes $B^*(Y)$ = Schnittpunkt der Geraden $M = 0$ und $N = 0$ (vgl. (83)).

Bei $\Delta_{\lambda} = (\lambda \mu \nu) = 0$ können wir

$$\lambda_i = -\varrho \mu_i - \sigma \nu_i \quad (i = 3, 4, 5)$$

setzen und da, wie aus den Gleichungen (83) folgt, die λ , μ und ν nur bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt sind, können wir $\varrho = \sigma = 1$ wählen und also für einen Punkt A^*

$$\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 0 \quad (139)$$

voraussetzen. Hieraus folgen dann:

$$Y_i = (\mu \nu)_{jk} = (\nu \lambda)_{jk} = (\lambda \mu)_{jk}. \quad (140)$$

Zufolge (106) haben wir für A^* :

$$\Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = \Delta_l = L_i(Y) \quad (141)$$

und nach (60) läßt sich in $T_{345\pi}(Y)$ der Faktor Δ_l absondern:

$$T_{345\pi}(Y) = \Delta_l \cdot [Y_4 Y_5 (c - \gamma) + Y_5 Y_3 (d - \delta) + Y_3 Y_4 (e - \eta)]. \quad (142)$$

Hier kann man wieder $\Delta_l \neq 0$ voraussetzen, da $\Delta_{\lambda} = 0$ und $\Delta_l = 0$ zusammen den Punkt $B^* = B_{345}$ ergeben und für diesen Punkt ist jedes $T_{345\pi}$ Null. Somit kann man die Bedingung, daß B^* auch auf der Kurve dritter Ordnung $T_{3459}(X) = 0$ in der Ebene 2^3 liegt, auch durch die Gleichung

$$H_9 = Y_4 Y_5 (c^9 - \gamma^9) + Y_5 Y_3 (d^9 - \delta^9) + Y_3 Y_4 (e^9 - \eta^9) = 0 \quad (143)$$

festlegen.

Schreiben wir (143) für die oberen Indizes 6, 7 und 8 an, so ergeben sich drei homogene lineare Gleichungen für die Produkte $Y_i Y_k$, die durch alle Punkte A^* der Kurve $\Delta_{\lambda} = 0$ befriedigt werden. Hieraus folgt, daß entweder

$$Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0 \quad (144)$$

ist oder aber die im ternären Gebiete 6, 7, 8 gebildete Determinante

$$\vartheta = (c - \gamma, d - \delta, e - \eta) \quad (145)$$

verschwindet.

Im ersteren Falle haben wir nach (140) die drei Gleichungen

$$(\mu \nu)_{ij} = 0 \text{ oder } \left\| \begin{array}{ccc} \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 \end{array} \right\| = 0 \quad (146)$$

und dies gibt die bekannte Schnittfigur in der Ebene l^3 , die durch beistehendes Schema (Abb. 5) festgehalten werden kann. Setzt man voraus, daß die drei ebenen Kurven $\mu_i = 0$ von der Ordnung μ sind und daß kein Punkt allen drei Kurven gemeinsam ist (und analog für die drei Kurven $\nu_i = 0$ von der Ordnung ν), dann haben die drei Kurven $(\mu \nu)_{ik} = 0$

$$\mu^2 + \mu \nu + \nu^2$$

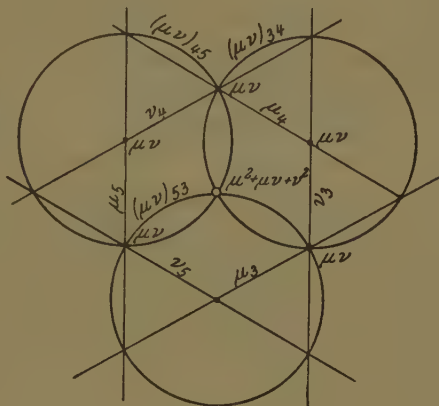


Abb. 5.

Punkte Q gemeinsam. In der Figur sind diese drei Kurven der Ordnung $(\mu + \nu)$ durch drei Kreise dargestellt. Alle Punkte Q liegen auf $\Delta_l = 0$.

Im zweiten Falle muß ϑ von (145) Null sein. Wir haben

$$\vartheta = (cde) - \{(\gamma de) + (\delta ec) + (\eta cd)\} + \{(cd\eta) + (d\eta\gamma) + (e\gamma\delta)\} - (\gamma\delta\eta). \quad (147)$$

Nach einer bei (69) gemachten Bemerkung lassen sich die hier stehenden acht Klammerfaktoren (cde) , (γde) , $\dots$, $(\gamma\delta\eta)$ rational durch die zwölf Invarianten (69) ausdrücken. Man erhält, bei Benützung von (65) und der Abkürzungen (95)

$$(cde) = \frac{\hat{c}_4 + \hat{c}_5}{\Delta}, \quad (\gamma\delta\eta) = \frac{\hat{\gamma}_4 + \hat{\gamma}_5}{\Delta}$$

$$(\gamma de) = -\frac{d_3 e_4 \gamma_5 + d_5 e_3 \gamma_4}{\Delta}, \quad (cd\eta) = -\frac{\delta_3 \eta_4 c_5 + \delta_5 \eta_3 c_4}{\Delta}$$

und hieraus alle weiteren Beziehungen durch zyklisches Weitergehen. Setzen wir dies in (147) ein, so entsteht:

$$\vartheta \cdot \Delta = \hat{c}_4 + \hat{c}_5 - \hat{\gamma}_4 - \hat{\gamma}_5 + \sum_z (d_3 e_4 \gamma_5 + d_5 e_3 \gamma_4) - \sum_z (\delta_3 \eta_4 c_5 + \delta_5 \eta_3 c_4). \quad (148)$$

§ 14. Besondere Fälle.

Zur Ermittlung der Ordnung der verschiedenen, in der Ebene l^3 gelegenen Kurven $\Delta = 0$, $\Delta_l = 0$, $\dots$ haben wir vorerst in den durch

(69) gegebenen Größen $c_i, \gamma_k, \dots$ die Faktoren C, D und E abzusondern, was nach (73) geschehen kann. Man erhält so z. B. bei Δ die Beziehung (74):

$$\Delta = (CDE)^4 \cdot \Delta' = (CDE)^4 \cdot (c_4' \gamma_5' - c_5' \gamma_4').$$

In den auf diese Weise entstehenden Polynomen der $c_i', \gamma_k', \dots$ kann dann noch bei jedem Faktor $c_i', \gamma_k', \dots$ nach Gleichung (80) der Faktor B^2 herausgeholt werden, wodurch Polynome in den Invarianten $c_i'', \gamma_k'', \dots$ entstehen mit Koeffizienten, die Potenzprodukte von C, D und E sind. Diese $c_i'', \gamma_k'', \dots$ enthalten die Reihe A im zwölften Grad; B, C, D und E sind vom Grade drei in A .

Man bekommt auf diese Weise folgende Übersicht:

Komitanten	Vgl. Formel Nr.	Grad in A
B, C, D, E	(9)	3
U_{ijk}	(31)	6
$c = CDU_{554}$ usf.	(55)	12
$c_4 = C^2 D^3 E \cdot c_4'$ usf.	(73)	36
c_4' usf.	(72)	18
$c_4'' = -c_4'/B^2$ usf.	(80)	12
l_i, m_j, n_k	(84)	75
l_i', m_j', n_k'	(92)	42
$l_i'' = l_i'/B^2, m_j'' = m_j'/B^2, n_k'' = n_k'/B^2$	(94) und (80)	30
$\Delta'' = \Delta/B^4 (CDE)^4$	(74)	24
$\Delta_l'' = \Delta_l/B^{12} (CDE)^{11} = -C^4 D^2 \Delta'' c_4''$		
$d_3'' e_3'' \delta_3'' + \dots$	(93), (94) und (80)	90
λ_i, μ_j, ν_k	(91)	111
$\lambda_i', \mu_j', \nu_k'$	(97) und (100)	63
$\lambda_i'' = -\lambda_i'/B^6$ usf.	(100) und (80)	45
$(\mu'' \nu'')_{45} = (\mu\nu)_{45}/B^{12} \cdot C^{12} D^{10} E^{10}$	(146) und (100)	90
$(\mu'' \nu'')_{53} = (\mu\nu)_{53}/B^{12} \cdot C^{11} D^{11} E^{10}$		
$(\mu'' \nu'')_{34} = (\mu\nu)_{34}/B^{12} \cdot C^{11} D^{10} E^{11}$		
$\Delta_\lambda'' = \Delta_\lambda/B^{18} \cdot (CDE)^{16} = C^6 D^3 c_4'' \dots \delta_3'' + \dots$ 9 Faktoren	(100)	135
$\hat{c}_4'' = c_4'' d_5'' e_3''$	(95)	36
ϑ	(145)	36

Wie schon oben bemerkt, sind die Punkte A^{**} , durch die Transversalebene $T_{12 \dots 89}$ gehen, unter den Schnittpunkten der beiden Kurven

der Ordnung 135

$$(\Delta_{\lambda}'')^{678} = 0 \text{ und } (\Delta_{\lambda}'')^{679} = 0$$

zu suchen. Für diese Kurven sind jedoch die im § 3 mit A_{ijk} und mit $A^{(i)}$ bezeichneten Punkte, sowie die Schnittpunkte der Kurven $\Delta'' = 0$, $\Delta_i'' = 0$ und $(\mu'' \nu'')_{ik} = 0$ Ausnahmepunkte. Es ist demzufolge das Verhalten dieser Kurven in diesen Punkten zu untersuchen.

Vorerst aber haben wir die Fälle zu behandeln, in denen eine oder mehrere der Invarianten B , C , D und E Null sind. Im Besonderen ist zu untersuchen, wie die Kurven dritter Ordnung (30) in der Ebene 2^3 sich dann verhalten.

Wir haben bisher die meisten der Formeln unter der Voraussetzung $B \neq 0$ abgeleitet, d. h. für den Fall, daß man in der Ebene 2^3 über ein Koordinatendreieck $B_3 B_4 B_5$ verfügt. Aber selbst für $B \neq 0$ verlieren viele der obigen Formeln ihren Sinn, wenn $CDE = 0$ ist. Denn die Umformung von Gleichung (30) zu (56), d. h. also das Ersetzen von K_{3456} durch T_{3456} ist dann nicht mehr durchführbar. Auf jeden Fall aber bleibt die Identität (32) $W = 0$ bestehen und wir fragen dann in erster Linie nach dem Verhalten der Kurven dritter Ordnung $K_{345\pi}$ in der Ebene 2^3 .

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

1. $B \neq 0$, $C = 0$, $DE \neq 0$
2. $B \neq 0$, $C = D = E = 0$
3. $B = C = D = E = 0$.

Andere Fälle sind nicht möglich, da, wie im § 3 gezeigt wurde, bei den vier Komitanten B , C , D und E das Verschwinden zweier von ihnen das Nullsein einer dritten oder aller vier nach sich zieht.

Fall 1). $C = 0$, $BDE \neq 0$. Die Identität (32) sieht dann so aus:

$$W = DE (DU_{533} + EU_{433}) = 0. \quad (149)$$

Die durch (30) gegebene Komitante K_{3456} können wir dann wieder einfacher schreiben:

$$\begin{aligned} K_{3456} &= X_4 X_5^2 U_{554} + X_4^2 X_5 U_{454} \\ &+ X_5 X_3^2 U_{533} + X_5^2 X_3 U_{553} + X_3 X_4 X_5 (U_{453} + U_{534}) = \\ &+ X_3 X_4^2 U_{434} + X_3^2 X_4 U_{433} \\ &= X_4 X_5^2 \cdot c + X_4^2 X_5 \cdot \gamma \\ &+ X_5 X_3^2 \cdot d + X_5^2 X_3 \cdot \delta + X_3 X_4 X_5 \cdot \varepsilon \quad (150) \\ &+ X_3 X_4^2 \cdot e + X_3^2 X_4 \cdot \eta \end{aligned}$$

wobei also (vgl. (71)

$$U_{453} + U_{534} = \varepsilon$$

gesetzt ist und die Buchstaben $c, \gamma, \dots$ so wie in (55) gebraucht sind, aber ohne die Faktoren C, D und E .

(149) läßt sich jetzt so ausdrücken:

$$Dd + E\eta = 0, \quad (151)$$

so daß also

$$Dd_3 + E\eta_3 = D(dc\gamma) + E(\eta c\gamma) = 0 \text{ und } d_5 = (d\eta) = 0, \quad \eta_4 = (\eta d\delta) = 0 \quad (152)$$

gelten.

Als Gleichung der Tangente an die in 2^3 liegende Kurve dritter Ordnung $K_{345\pi}(X) = 0$ im Punkte $B_3 (X_4 = X_5 = 0)$ erhalten wir wegen (151):

$$L_3 = DX_4 - EX_5 = 0 \quad (L_4 = EX_5, L_5 = -DX_4), \quad (153)$$

d. h. jetzt fällt der Punkt B_{345} mit B_3 zusammen und alle Kurven $K_{345\pi}(X) = 0$ berühren sich in ihm.

Auch die Identitäten (49) vereinfachen sich bei $C = 0$. Im Besonderen wird aus der ersten dieser Gleichungen für $Y = Z = B_3$ nach (149)

$$B \cdot U_{D_5 B_3 B_3} \equiv 0, \text{ d. h.}$$

$$U_{D_5 B_3 B_3} = (\pi D_5 3^3 A) (\pi B_3 4^3 A) (\pi B_3 5^3 A) \equiv 0 \quad (154)$$

für alle π_{ijk} .

Analog zu (62) lassen sich wieder zerfallende Linearkombinationen der $T_{345\pi} (\pi = 6, 7, 8)$ bilden:

$$\Sigma T_{3456} (c\gamma)^{78} = X_3 \cdot Q_3$$

$$\Sigma T_{3456} (d\delta)^{78} = X_4 \cdot Q_4$$

$$\Sigma T_{3456} (e\eta)^{78} = X_5 \cdot Q_5$$

wobei L_3 von (153) jetzt Tangente an den Kegelschnitt Q_3 , im Punkte B_3 ist. Die weitere Behandlung verläuft wie im allgemeinen Falle und führt über die zu (88) analogen Gleichungen zu den Geraden A, M und N in der Ebene 2^3 und damit zu den Komitanten Δ, Δ_l und Δ_λ .

Fall 2. Hier ist A einer der drei Punkte A_{1345} (vgl. den Fall (a) im § 3). Wir können hier setzen (vgl. die Figur 2 in § 3):

$$D_3 = D_5 = C_1 + \lambda A, \quad E_3 = E_4 = C_4 + \mu A; \quad (155)$$

sind dann c, d und e weitere Punkte der Ebenen $3^3, 4^3$ und 5^3 , so ist

$$3^3 = (C_4 C_2 c), \quad 4^3 = (C_4 + \lambda A, D_2 d), \quad 5^3 = (C_4 + \mu A, E_2 e)$$

und nach (6):

$$B_3 = C_2 - \frac{1}{3} J_{23} \cdot A, \quad B_4 = D_2 - \frac{1}{3} J_{24} \cdot A, \quad B_5 = E_2 - \frac{1}{3} J_{25} \cdot A.$$

Mit diesem Ansatz wird nach (26)

$$\begin{aligned} K_{345\pi} &= (\pi^3 BA) (\pi^4 BA) (\pi^5 BA) = \\ &= (\pi C_4 C_2 c BA) (\pi C_4 D_2 d BA) (\pi C_4 E_2 e BA). \end{aligned} \quad (156)$$

Bringen wir alle drei Reihen π in den ersten Klammerfaktor, so entsteht

$$\begin{aligned} 6K_{345\pi} &= (\pi^3 C_4 AB) \cdot [(C_4 BAB_4 B_3 d) (C_4 BAB_5 ce) - \\ &\quad - (C_4 BAB_5 B_3 e) (C_4 BAB_4 cd)]. \end{aligned} \quad (157)$$

Setzen wir hier wieder

$$B = X_3 B_3 + X_4 B_4 + X_5 B_5$$

so entsteht eine in eine Gerade G_π

$$X_3 \cdot (\pi^3 C_4 B_3 A) + X_4 \cdot (\pi^3 C_4 B_4 A) + X_5 \cdot (\pi^3 C_4 B_5 A) = 0 \quad (158)$$

und in einen Kegelschnitt Q

$$X_4 X_5 q_{45} + X_5 X_3 q_{53} + X_3 X_4 q_{34} = 0 \quad (159)$$

zerfallende Kurve dritter Ordnung. Hierbei sind die Koeffizienten q_{ik} von Q von π^3 unabhängig und überdies durch die Invariante $B = (B_3 B_4 5^3 A)$ teilbar. Dies bedeutet, daß für jeden Punkt B_0 von Q die Komitante (156) verschwindet, daß also durch AB_0 . ∞^1 Transversalebene T_{12345} gehen. Durch $K_{3467} = 0$ und $K_{3468} = 0$ werden dann in der Ebene 2^3 wieder fünf Punkte B^* bestimmt und die Existenz einer Transversalebene $T_{12 \dots 78}$ erfordert dann, daß B^* auf Q gelegen sei, also eine Bedingung für den Punkt A_{1345} , so daß also im Allgemeinen durch A_{1345} keine Transversalebene $T_{12 \dots 78}$ existiert.

Die Gerade G_π von (158) hängt von π^3 ab. Die drei Geraden G_6 , G_7 und G_8 gehen dann durch einen gemeinsamen Punkt B^* in 2^3 , wenn die Invariante

$$(6^3 C_4 A2) (7^3 C_4 A2) (8^3 C_4 A2)$$

Null ist, was wiederum eine Bedingung für A_{1345} erfordert. Im allgemeinen Falle gibt es also in dem soeben behandelten Fall 2, d. h. also durch die drei Punkte A_{1345} keine Transversalebene $T_{12 \dots 78}$. und daher auch keine $T_{12 \dots 89}$.

Fall 3. $B = C = D = E = 0$, A ist einer der drei Punkte A' , A'' , A''' (vgl. Fig. 4). Hier gibt es in der Ebene 2^3 keine Kurve dritter Ordnung $K_{345\pi} (B) = 0$ im bisherigen Sinne, da jetzt auch die drei Punkte B_i auf einer Geraden β liegen. Wir haben wieder

$$K_{345\pi} = (\pi^3 BA) (\pi^4 BA) (\pi^5 BA) \quad (160)$$

mit

$$B = X_3 B_3 + X_4 B_4 + X \cdot b, \quad 2^3 = (B_3 B_4 b) \quad (161)$$

und können nach Fig. 3 setzen:

$$3^3 = (C_2 C_4 c) \text{ mit } C_2 = B_3 + \gamma_1 A'$$

$$4^3 = (D_2 D_3 d) \text{ mit } D_2 = B_4 + \delta A' \text{ und } D_3 = C_4 + \delta_1 A'$$

$$5^3 = (E_2 E_3 e) \text{ mit } E_3 = C_5 + \eta A' \text{ und } E_2 = B_5 + \eta_1 A',$$

wobei noch

$$C_5 = C_2 + \gamma C_4 \text{ und } B_5 = B_3 + \beta B_4$$

gesetzt werden kann, so daß wir auch haben

$$E_3 = B_3 + \gamma C_4 + \eta' A' \text{ und } E_2 = B_3 + \beta B_4 + \eta_1 A'.$$

Setzt man dies in (160) ein, so entsteht nach Zusammenziehung aller drei Reihen π in demselben Klammerfaktor:

$$\begin{aligned} & \gamma (\pi^3 C_4 BA') (B_3 C_4 ec BA') (B_3 B_4 C_4 d BA') - \\ & - \beta (\pi^3 c BA') (B_3 B_4 C_4 d BA') (B_3 B_4 C_4 e BA') + \\ 6K_{345\pi} = & + \beta (\pi^3 C_4 BA') (B_3 B_4 ce BA') (B_3 B_4 C_4 d BA') + \\ & + \beta (\pi^3 B_3 BA') (B_3 B_4 C_4 e BA') (B_4 C_4 cd BA') - \\ & - \beta \gamma (\pi^3 C_4 BA') (B_3 B_4 C_4 c BA') (B_4 C_4 ed BA'). \end{aligned} \quad (162)$$

Setzen wir hier

$$B = X_3 B_3 + X_4 B_4 + X \cdot b,$$

so entsteht in jedem Gliede von (162) der Faktor $X \cdot (B_3 B_4 b A' \dots)$, d. h. auch hier zerfällt die Kurve dritter Ordnung $K_{345\pi}$ in die Gerade $\beta = B_3 B_4 (X = 0)$ und in einen noch von den π_{ijk} abhängigen Kegelschnitt Q .

§ 15. Die Ausnahmepunkte in 1^3 .

In der Ebene 1^3 wird (vgl. (11)) und (9)) durch

$$C = (C_4 C_5 2^3 A) = (3\dot{3}2^3 A) (3^2 4^3 A) (\dot{3}^2 5^3 A) = 0$$

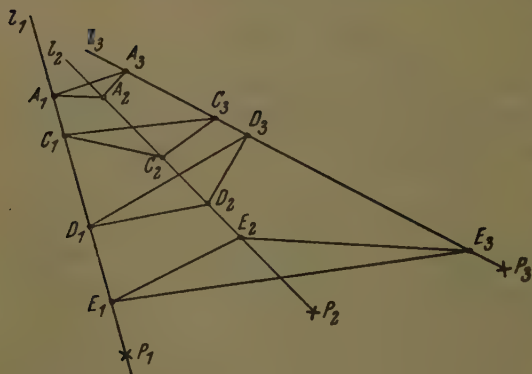


Abb. 6.

eine Kurve dritter Ordnung bestimmt. Ist auch $D = 0$, so folgt nach § 3, daß auch wenigstens noch eine der Invarianten B oder E verschwindet. Demgemäß unterscheiden wir so wie in § 3 die beiden Fälle

$$(\alpha) \quad B \neq 0,$$

$$C = D = E = 0$$

(drei Punkte A_{1345})

$$(\beta) \quad B = C = D = E = 0 \quad (\text{die drei Punkte } A', A'' \text{ und } A''').$$

Im Falle (α) nennen wir die drei Punkte A_{1345} A_1 , A_2 und A_3 ; dann gehen, (vgl. die Abb. 6) durch diese Punkte die drei Geraden $l_i = A_i P_i$, die auch noch die Ebenen 3^3 , 4^3 und 5^3 treffen. Wir können dann setzen ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} C_i &= A_i + \gamma_i P_i & 3^3 &= (C_1 C_2 C_3) \\ D_i &= A_i + \delta_i P_i & 4^3 &= (D_1 D_2 D_3) & A &= Z_1 A_1 + Z_2 A_2 + Z_3 A_3 \\ E_i &= A_i + \eta_i P_i & 5^3 &= (E_1 E_2 E_3) \end{aligned} \quad (163)$$

Für die Komitante C erhalten wir jetzt:

$$C = (3^3, A_1 + \delta_1 P_1, A_2 + \delta_2 P_2, A_3 + \delta_3 P_3, A) (\hat{3}^3, A_1 + \eta_1 P_1, A_2 + \eta_2 P_2, A_3 + \eta_3 P_3, A) (3\hat{3}2^3 A).$$

Hier bringen wir alle drei Reihen 3 in den ersten Klammerfaktor und setzen dann $3^3 = (C_1 C_2 C_3)$. Hierauf vereinigen wir auch noch die drei Reihen $\hat{3}$ und setzen $A = \Sigma Z_i A_i$. Es läßt sich dann der Faktor $(A_1 A_2 A_3 P_1 P_2 P_3) \neq 0$ abspalten und man erhält statt $C = 0$ die Gleichung:

$$C_Z^3 = \begin{cases} Z_1 \gamma_1 (\gamma_2 - \eta_2) (\gamma_3 - \eta_3) [Z_1 \gamma_1 (\gamma_2 - \delta_2) (\gamma_3 - \delta_3) (D_1 E_1 2^3 A) + \\ + Z_2 \gamma_2 (\gamma_3 - \delta_3) (\gamma_1 - \delta_1) (D_2 E_1 2^3 A) + \\ + Z_3 \gamma_3 (\gamma_1 - \delta_1) (\gamma_2 - \delta_2) (D_3 E_1 2^3 A)] + \\ + Z_2 \gamma_2 (\gamma_3 - \eta_3) (\gamma_1 - \eta_1) [Z_1 \gamma_1 (\gamma_2 - \delta_2) (\gamma_3 - \delta_3) (D_1 E_2 2^3 A) + \\ + Z_2 \gamma_2 (\gamma_3 - \delta_3) (\gamma_1 - \delta_1) (D_2 E_2 2^3 A) + \\ + Z_3 \gamma_3 (\gamma_1 - \delta_1) (\gamma_2 - \delta_2) (D_3 E_2 2^3 A)] + \\ + Z_3 \gamma_3 (\gamma_1 - \eta_1) (\gamma_2 - \eta_2) [Z_1 \gamma_1 (\gamma_2 - \delta_2) (\gamma_3 - \delta_3) (D_1 E_3 2^3 A) + \\ + Z_2 \gamma_2 (\gamma_3 - \delta_3) (\gamma_1 - \delta_1) (D_2 E_3 2^3 A) + \\ + Z_3 \gamma_3 (\gamma_1 - \delta_1) (\gamma_2 - \delta_2) (D_3 E_3 2^3 A)] \end{cases} = 0. \quad (164)$$

Hier ist noch $A = \Sigma Z_i A_i$ zu setzen, so daß also z. B.

$$(D_1 E_1 2^3 A) = Z_2 \cdot (D_1 E_1 2^3 A_2) + Z_3 \cdot (D_1 E_1 2^3 A_3)$$

wird und (164) keine Glieder mit Z_i^3 enthält. Hieraus folgt, daß C_Z^3 durch die Punkte A_i geht. Man rechnet leicht nach, daß diese Punkte einfache Punkte von C_Z^3 sind und daß sich C_Z^3 und D_Z^3 einfach schneiden, d. h. verschiedene Tangenten in A_i haben. Ebenso beweist man leicht, daß die Kurve B_Z^3 mit der Gleichung

$$B_Z^3 = (2^2, A_1 + \delta_1 P_1, A_2 + \delta_2 P_2, A_3 + \delta_3 P_3, A) (\hat{2}^2, A_1 + \eta_1 P_1, A_2 + \eta_2 P_2, A_3 + \eta_3 P_3, A) (2\hat{2}, A_1 + \gamma_1 P_1, A_2 + \gamma_2 P_2, A_3 + \gamma_3 P_3, A) = 0$$

nicht durch die Punkte A_i geht in Übereinstimmung mit $B \neq 0$.

Fall (β). $B = C = D = E = 0$.

Hier seien $l_i = P_i Q_i$ die drei Geraden, die die vier Ebenen 2^3 , 3^3 , 4^3 und 5^3 treffen. Diese Ebenen selbst sind dann gegeben durch $2^3 = (b_1 b_2 b_3)$ usw. wobei,

$$\begin{aligned} b_i &= P_i + \beta_i Q_i \\ c_i &= P_i + \gamma_i Q_i \\ d_i &= P_i + \delta_i Q_i \\ e_i &= P_i + \eta_i Q_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

gesetzt ist (vgl. die Abb. 7). Mit diesen Bezeichnungen haben wir

$$\begin{aligned} 2^3 &= (b_1 b_2 b_3) = (P_1 + \beta_1 Q_1, P_2 + \beta_2 Q_2, P_3 + \beta_3 Q_3), \text{ d. h.} \\ 2^3 &= (P_1 P_2 P_3) + \Sigma \beta_1 (Q_1 P_2 P_3) + \Sigma \beta_2 \beta_3 (P_1 Q_2 Q_3) + \beta_1 \beta_2 \beta_3 (Q_1 Q_2 Q_3) \quad (165) \end{aligned}$$

und ebenso 3^3 , 4^3 und 5^3 mit γ , δ und η .

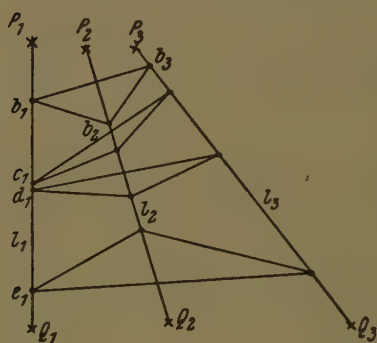


Abb. 7.

Der $R_3(l_2, l_3) = (P_2 P_3 Q_2 Q_3)$ schneidet die Ebene l^3 im Punkte $A' = a_1$. Wir haben daher

$$\begin{cases} A' = a_1 = 1 (1^2 P_2 P_3 Q_2 Q_3) \\ A'' = a_2 = 1 (1^2 P_3 P_1 Q_3 Q_1) \\ A''' = a_3 = 1 (1^2 P_1 P_2 Q_1 Q_2) \end{cases} \quad (166)$$

und ein beliebiger Punkt A in der Ebene l^3 ist jetzt gegeben durch

$$A = Z_1 \cdot a_1 + Z_2 \cdot a_2 + Z_3 \cdot a_3.$$

Nach (5) berechnet man hiermit die Punkte B_i . Wir haben z. B.

$$B_3 = 2 (2^2 3^3 A),$$

also nach (165), wenn wir 3^3 einsetzen:

$$\begin{aligned} B_3 &= (2^2 P_1 P_2 P_3 A) 2 + \Sigma \gamma_1 (2^2 P_2 P_3 Q_1 A) 2 + \Sigma \gamma_2 \gamma_3 (2^2 P_1 Q_2 Q_3) 2 + \\ &\quad + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 (2^2 Q_1 Q_2 Q_3 A) 2. \end{aligned}$$

Hier bringen wir in jedem Gliede die außerhalb des Klammerfaktors stehende Reihe 2 in den Klammerfaktor und drücken dann 2^3 wieder nach (165) aus. Es entsteht, wenn wir

$$M = (P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3) \neq 0 \quad (167)$$

voraussetzen, von der Identität

$$M \cdot A = (A P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3) P_1 - (A P_1 P_3 Q_1 Q_2 Q_3) P_2 + \dots - (A P_1 P_2 Q_1 Q_2) Q_3$$

Gebrauch machen und zur Abkürzung

$$\begin{cases} p_1 = (P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3 A) \\ p_1 = (P_3 P_1 Q_1 Q_2 Q_3 A) \\ p_3 = (P_1 P_2 Q_1 Q_2 Q_3 A) \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 = (P_1 P_2 P_3 Q_2 Q_3 A) \\ q_2 = (P_1 P_2 P_3 Q_3 Q_1 A) \\ q_3 = (P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 A) \end{cases} \quad (168)$$

setzen, nach einiger Rechnerei:

$$3B_3 = \underbrace{(P_1 + \beta_1 Q_1)}_{b_1} (q_1 + \gamma_1 p_1) (\beta_2 - \gamma_2) (\beta_3 - \gamma_3) + \underbrace{(P_2 + \beta_2 Q_2)}_{b_2} (q_2 + \gamma_2 p_2) (\beta_3 - \gamma_3) (\beta_1 - \gamma_1) + \underbrace{(P_3 + \beta_3 Q_3)}_{b_3} (q_3 + \gamma_3 p_3) (\beta_1 - \gamma_1) (\beta_2 - \gamma_2). \quad (169)$$

Hier ist also nach (168) die Reihe A in den p_i und q_i enthalten. B_4 , bzw. B_5 erhält man, wenn man in (169) die γ durch δ , bzw. durch η ersetzt.

Nach (8) oder

$$(B_3 B_4 B_5) = \frac{1}{3} B \cdot 2^3 = \frac{1}{3} B \cdot (b_1 b_2 b_3)$$

finden wir jetzt für die Invariante B :

$$9B = \begin{vmatrix} (q_1 + \gamma_1 p_1) (\beta_2 - \gamma_2) (\beta_3 - \gamma_3) & (q_2 + \gamma_2 p_2) (\beta_3 - \gamma_3) (\beta_1 - \gamma_1) \\ (q_1 + \delta_1 p_1) (\beta_2 - \delta_2) (\beta_3 - \delta_3) & (q_2 + \delta_2 p_2) (\beta_3 - \delta_3) (\beta_1 - \delta_1) \\ (q_1 + \eta_1 p_1) (\beta_2 - \eta_2) (\beta_3 - \eta_3) & (q_2 + \eta_2 p_2) (\beta_3 - \eta_3) (\beta_1 - \eta_1) \\ (q_3 + \gamma_3 p_3) (\beta_1 - \gamma_1) (\beta_2 - \gamma_2) \\ (q_3 + \delta_3 p_3) (\beta_1 - \delta_1) (\beta_2 - \delta_2) \\ (q_3 + \eta_3 p_3) (\beta_1 - \eta_1) (\beta_2 - \eta_2) \end{vmatrix}. \quad (170)$$

Berechnet man nach (168) und (166) $p_i(a_k)$ und $q_i(a_k)$, so wird z. B.

$$p_1(a_2) = (P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3 a_2) = (P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_5^1) (1^2 P_3 P_1 Q_3 Q_1).$$

Hier ziehen wir alle drei Reihen 1 im zweiten Klammerfaktor zusammen und erhalten

$$p_1(a_2) = \frac{1}{3} (1^3 P_3 Q_3 Q_1) (P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3) = \frac{1}{3} (1^3 P_3 Q_3 Q_1) \cdot M = R_{364} \cdot M.$$

Hierbei denken wir uns die sechs Reihen $P_1 P_2 P_3 Q_1 Q_2 Q_3$ mit 123456 nummeriert und gebrauchen für die Komitanten $\frac{1}{3} (1^3 ijk)$ die Abkürzung R_{ijk} . Es ist also

$$R_{364} = \frac{1}{3} (1^3 P_3 Q_2 Q_1); R_{125} = \frac{1}{3} (1^3 P_1 P_2 Q_2) \text{ usw.} \quad (171)$$

Wir haben dann:

$$\begin{cases} p_1(a_1) = 0 & p_1(a_2) = + R_{364} \cdot M & p_1(a_3) = - R_{245} \cdot M \\ p_2(a_1) = - R_{356} \cdot M & p_2(a_2) = 0 & p_2(a_3) = + R_{145} \cdot M \\ p_3(a_1) = + R_{256} \cdot M & p_3(a_2) = - R_{164} \cdot M & p_3(a_3) = 0 \end{cases} \quad (172)$$

und ebenso

$$\begin{cases} q_1(a_1) = 0 & q_1(a_2) = - R_{316} \cdot M & q_1(a_3) = + R_{125} \cdot M \\ q_2(a_1) = + R_{236} \cdot M & q_2(a_2) = 0 & q_2(a_3) = - R_{124} \cdot M \\ q_3(a_1) = - R_{235} \cdot M & q_3(a_2) = + R_{314} \cdot M & q_3(a_3) = 0 \end{cases} \quad (173)$$

Aus (166) ergibt sich für die Punkte a_i :

$$\begin{cases} a_1 = & + R_{356} P_2 - R_{256} P_3 & + R_{236} Q_2 - R_{235} Q_3 \\ a_2 = - R_{364} P_1 & + R_{164} P_3 - R_{316} Q_1 & + R_{314} Q_3 \\ a_3 = + R_{245} P_1 - R_{145} P_2 & + R_{125} Q_1 - R_{124} Q_2 \end{cases} \quad (174)$$

Wegen $A = \sum Z_i a_i$ haben wir neben

$$\begin{aligned} A = & P_1 (-Z_2 R_{364} + Z_3 R_{245}) + P_2 (-Z_3 R_{145} + Z_1 R_{356}) + P_3 (-Z_1 R_{256} + \\ & + Z_2 R_{164}) + Q_1 (-Z_2 R_{316} + Z_3 R_{125}) + Q_2 (-Z_3 R_{124} + Z_1 R_{236}) + \\ & + Q_3 (-Z_1 R_{235} + Z_2 R_{314}) \end{aligned} \quad (175)$$

die Gleichungen:

$$\begin{cases} p_1(A) = M \cdot (Z_2 R_{364} - Z_3 R_{245}) & q_1(A) = -M \cdot (Z_2 R_{316} - Z_3 R_{125}) \\ p_2(A) = M \cdot (Z_3 R_{145} - Z_1 R_{356}) & q_2(A) = -M \cdot (Z_3 R_{124} - Z_1 R_{236}) \\ p_3(A) = M \cdot (Z_1 R_{256} - Z_2 R_{164}) & q_3(A) = -M \cdot (Z_1 R_{235} - Z_2 R_{314}) \end{cases} \quad (176)$$

Setzen wir diese Werte in (170) ein, so ergibt sich für $B = 0$ eine Gleichung dritten Grades in den Z_i , die keine Glieder Z_i^3 enthält, d. h. $B = 0$ geht durch die Punkte a_i . Als Gleichung der Tangente im Punkte a_1 an die Kurve $B = 0$ erhält man:

$$T_1(Z) = \begin{vmatrix} Z_2(\gamma_1 R_{364} - R_{316}) - Z_3(\gamma_1 R_{245} - R_{125}) & \gamma_2 R_{356} - R_{236} & \gamma_3 R_{256} - R_{235} \\ Z_2(\delta_1 R_{364} - R_{316}) - Z_2(\delta_1 R_{245} - R_{125}) & \delta_2 R_{356} - R_{236} & \delta_3 R_{256} - R_{235} \\ Z_2(\eta_1 R_{364} - R_{316}) - Z_3(\eta_1 R_{245} - R_{125}) & \eta_2 R_{356} - R_{236} & \eta_3 R_{256} - R_{235} \end{vmatrix} \quad (177)$$

Die drei Punkte a_i sind also für die Kurven $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ und $E = 0$ einfache Punkte.

On Congruence Characters.

By

F. I. Mautner, Baltimore, U. S. A.

(Received April 17, 1953).

1. Let ϱ be the field of rational numbers. For any prime number $p = 2, 3, 5, \dots$, let ϱ_p be the p -adic completion of ϱ in the usual p -adic metric. Denote by U_p the group of units in the ring of integers of ϱ_p and by (p^n) the ideal generated by p^n in this ring. In the usual topology for p -adic numbers U_p is a compact (commutative) topological group and the subgroups $1 + (p^n)$ form for $n = 1, 2, 3, \dots$, a fundamental system of neighborhoods of 1 in U_p . Let $\hat{U}_p$ be the character group of U_p ; if $\hat{u}_p \in \hat{U}_p$ is a non-trivial character of U_p , then its kernel $f(\hat{u}_p)$ must be the direct product of one of the subgroups $1 + (p^n)$ times a subgroup of the group of roots of unity in ϱ_p , as is easily seen. Now let a be an arbitrary element of U_p and put

$$\chi(a) = \hat{u}_p(a) \text{ for } a \in U_p \cap \varrho. \quad (1.1)$$

Then $\chi(a)$ is a character of the group $U_p \cap \varrho$ and is easily seen to have the kernel $f(\hat{u}_p) \cap \varrho$. Thus $\chi(a)$ is a congruence character modulo p^n and it is clear that χ has no proper extension as a congruence character. So $\chi(a)$ is in the usual terminology of the theory of numbers a primitive congruence character with conductor p^n . Since $\chi =$ restriction of $\hat{u}_p$ to a subset of U_p , it is clear that the mapping

$$\hat{u}_p \rightarrow \chi \quad (1.2)$$

is one-valued. On the other hand if χ is an arbitrary primitive congruence character whose conductor is a prime-power p^n , then χ can be considered as a character of the group $U_p \cap \varrho$, whose kernel is the subgroup $\varrho \cap \{1 + (p^n)\}$ or $\varrho \cap \{\pm 1 + (p^n)\}$. Hence χ is a continuous character of $U_p \cap \varrho$ in the topology induced by U_p and can therefore be extended uniquely to a continuous character of U_p . This establishes a natural one-one correspondence between the non-trivial characters $\hat{u}_p$ of U_p and those primitive congruence characters $\chi \neq 1$, whose conductors are the powers p^n of this prime number p .

Now let U be the direct product of the groups U_p as p varies over all prime numbers. Introduce in U the usual cartesian product topology. Then U is a commutative compact topological group. Let $\hat{U}$ be its character group. Then every $\hat{u} \in \hat{U}$ is a unique product $\hat{u} = \prod_p \hat{u}_p$, where $\hat{u}_p$ is the restriction of $\hat{u}$ to the subgroup U_p of U . Hence $\hat{u}_p$ is for a given $\hat{u}$ the 1-character of U_p for all but a finite number of p . And if $f(\hat{u}_p)$ is the kernel of $\hat{u}_p$ in U_p , then the kernel $f(\hat{u})$ of $\hat{u}$ is given by $f(\hat{u}) = \prod_p f(\hat{u}_p)$ where $f(\hat{u}_p) = U_p$ for all but a finite number of p , let us say for $p \neq p_j$, $j = 1, 2, \dots, r$. Then we have

$$f(\hat{u}_{p_j}) \supseteq 1 + (p_j^{n_j}) \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, r. \quad (1.3)$$

Let n_j be the smallest possible value for n_j for which the inclusion (1.3) holds. Put $m = \prod_{j=1}^r p_j^{n_j}$ and let a be a rational number prime to m . Then $a \in U_{p_j}$ for $j = 1, \dots, r$. Hence we may consider a to be an element of the direct product $\prod_{j=1}^r U_{p_j}$ by letting its j^{th} component $a_j \in U_{p_j}$ be equal to a for each $j = 1, \dots, r$. And now we may put

$$\text{and } \begin{cases} \chi(a) = \hat{u}(a) & \text{for } a \text{ prime to } m \\ \chi_j(a) = \hat{u}_{p_j}(a) & \text{for } a \text{ prime to } p_j^{n_j}. \end{cases} \quad (1.4)$$

By the above χ_j is a primitive congruence character with the conductor $m_j = m_j(\chi_j) = p_j^{n_j}$. And since we have $\hat{u}(a) = \prod_{j=1}^r \hat{u}_{p_j}(a)$, we obtain $\chi(a) = \prod_{j=1}^r \chi_j(a)$ for all a prime to m . Hence by well known properties of congruence characters $\chi(a)$ is a primitive congruence character with the conductor $m = m(\chi) = \prod_j m(\chi_j)$. On the other hand every primitive congruence character is a unique product of primitive characters χ_j where the conductor $m(\chi_j)$ of χ_j is a prime power. This establishes a natural one-one correspondence between the continuous characters $\hat{u}$ of U and the primitive congruence characters χ of the theory of numbers.

2. One can study the above one-one correspondence in more detail by embedding the multiplicative group $\mathcal{Q}^*$ of non-zero rational numbers isomorphically in the group U as follows. Every element u of U is determined by its components u_p , where $u_p \in U_p$. For any prime number q we define an element $u = u(q)$ of U but putting

$$u(q)_p = \begin{cases} q & \text{for } p \neq q \\ \varepsilon_q & \text{for } p = q \end{cases} \quad (2.1)$$

where ε_q is an arbitrary, but fixed element of U_q . For the rational number -1 we define $u(-1)_p = -1 \varepsilon U_p$ for all p , and of course for $1 \varepsilon U$ we put $u(1)_p = 1 \varepsilon U_p$ for all p . If a is any rational number $\neq 0$, write $a = \eta \prod_j q_j^{l_j}$ where $\eta = \pm 1$ and the q_j are the prime factors of a . Put

$$u(a) = u(\eta) \cdot \prod_j u(q_j)^{l_j}. \quad (2.2)$$

Thus if a is a rational integer

$$u(a)_p = a \varepsilon U_p \text{ if } p \nmid a$$

(2.2a)

and

$$u(a)_{q_j} = a q_j^{-l_j} \varepsilon_j^{-l_j} \varepsilon U_{q_j} \text{ for } q_j^{l_j} \mid a, \text{ but } q_j^{l_j+1} \nmid a.$$

Then it is clear that the mapping $a \rightarrow u(a)$ is a homomorphism of the group ϱ^* into the group U . If for a given a we have $u(a) = 1 \varepsilon U$, take any prime number p which does not occur in a . Then $u(a)_p = 1 \varepsilon U_p$ implies $a = 1$; hence the mapping $a \rightarrow u(a)$ is an isomorphism.

Now let $\hat{u}$ be a character of U which is 1 on all but one of the subgroups U_p : $\hat{u} = \hat{u}_p$. Then

$$\hat{u}_p(u(q)) = \chi(q) \quad \text{for } q \neq p \quad (2.3)$$

where χ is the congruence character corresponding to $\hat{u} = \hat{u}_p$ in the above sense, and $\hat{u}_p(u(p))$ is a certain complex number depending on the choice of $u(p)_p$ made in (2.1) above. For example we might have chosen $u(p)_p = 1 \varepsilon U_p$, then $\hat{u}_p(u(p)) = 1$, but we do not insist on this choice. Now if $a = \eta \prod_j q_j^{h_j}$ and if $q_j \neq p$ then

$$\hat{u}_p(u(a)) = \chi(a) \quad (2.4)$$

where $\chi(a)$ is the primitive congruence character corresponding to $\hat{u} = \hat{u}_p$. Hence it follows from equations (1.4) and the remarks after it that if $\hat{u}$ is our arbitrary element $\neq 1$ of $\hat{U}$ and χ the corresponding congruence character, then

$$\hat{u}(u(a)) = \chi(a) \quad (2.5)$$

for all rational numbers a which are prime to the conductor $m(\chi)$ of χ . Thus $\hat{u}(u(a))$ is an extension of $\chi(a)$ to a character of the whole group ϱ^* . Of course this extension is no longer a congruence character and depends on the above choice of $u(q)_q$ for every prime q .

If $\hat{u} = \prod_p \hat{u}_p$ and if χ_p is the congruence character corresponding to $\hat{u}_p$, then

$$\hat{u}_p(u(a)_p) = \begin{cases} \chi_p(a) & \text{if } p \nmid a \\ \chi_p(a^{-l_p}) \hat{u}_p(\varepsilon_p^{-l_p}) & \text{if } p^l p \mid a, \text{ but } p^{l+1} \nmid a \end{cases} \quad (2.6)$$

Hence

$$\hat{u}(u(a)) = \prod_p \hat{u}_p(u(a)_p) = \prod_p \chi_p(a) \cdot \prod_{p \nmid a} \chi_p(ap^{-1}) \hat{u}_p(\varepsilon_p^{-l_p}). \quad (2.7)$$

3. We shall now use the notion of a uniformly distributed sequence of elements in a compact topological group as developed by *H. Weyl* for the additive group of real numbers modulo 1 and extended by *B. Eckmann* to arbitrary compact topological groups¹. Let G be an arbitrary compact topological group. A sequence of distinct elements

$g_1, g_2, \dots$ of G is called uniformly distributed if $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |X|_N$ exists

and equals $\mu(X)$ for every closed subset X of G ; here $\mu(X)$ denotes the *Haar*-measure of X normalized so that $\mu(G) = 1$ and $|X|_N$ denotes the number of elements g_n which satisfies $g_n \in X$ and $n \leq N$. The sequence $g_1, g_2, \dots$ is uniformly distributed if and only if

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F(g_n) = \int_G F(g) d\mu(g) \quad \text{for every continuous function } F(g)$$

on G . Another equivalent criterion is that $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{g}(g_n) = 0$ for

every non-constant continuous irreducible (unitary) representation $\hat{g}$ of G .

We shall now apply this to the group U . Since U is commutative, its irreducible representations are of course simply the characters $\hat{u}$ considered in §§ 1 and 2 above. For every positive integer $n \in \mathfrak{q}^*$ consider the element $u(n)$ of U defined by (2.1) above.

Proposition: 3.1.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{u}(u(n)) = 0$$

for every element $\hat{u}$ of U except $\hat{u} = 1$. Hence the sequence $u(1), u(2), u(3), \dots, u(n), \dots$ is uniformly distributed in U .

¹ *H. Weyl*, Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.* 77 (1916), 313–352; *B. Eckmann*, Über Monothetische Gruppen, *Comm. Math. Helv.* 16 (1943–44), 249–265.

Proof: Let χ be the congruence character corresponding to $\hat{u}$ and let $m = m(\chi)$ be the conductor of χ . Let $m = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_r^{v_r}$ and write $n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_r^{l_r} \cdot n'$ with $(n', m) = 1$ or $n' = 1$. Then

$$\sum_{n \leq N} \hat{u}(u(n)) = \sum_{l_1, \dots, l_r} \hat{u}(p_1^{l_1} \dots p_r^{l_r} \cdot n') = \sum_{l_1, \dots, l_r} \hat{u}(p_1^{l_1} \dots p_r^{l_r}) \sum \chi(n').$$

In the last expression $l_1, \dots, l_r$ vary over all combinations of non-negative integers for which $p_1^{l_1} \dots p_r^{l_r} \leq N$ and for fixed $l_1, \dots, l_r$ the number n' varies over all integers $n' \leq N p_1^{-l_1} \dots p_r^{-l_r}$ for which $(n', m) = 1$ or $n' = 1$. Therefore

$$\left| \sum_{n=1}^N \hat{u}(u(n)) \right| \leq \sum_{l_1, \dots, l_r} \left| \hat{u}(p_1^{l_1} \dots p_r^{l_r}) \right| \cdot \left| \sum_{(n', m)=1} \chi(n') \right| \leq \varphi(m) \sum_{l_1, \dots, l_r} 1$$

because $\left| \sum_{(n', m)=1} \chi(n') \right| \leq \varphi(m)$ where $\varphi(m)$ is Euler's φ -function. Now

$$\sum_{l_1, \dots, l_r} 1 \leq \sum_{p^{l_j} \leq N} 1 = O(\log^r N).$$

Hence

$$\sum_{n \leq N} \hat{u}(u(n)) = O(\log^r N) = o(N)$$

as required.

Proposition: 3.2. Let q_n be again the n^{th} rational prime number. Then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{u}(u(q_n)) = 0$$

for all $\hat{u} \neq 1$. Hence the sequence $u(q_1), u(q_2), \dots, u(q_n), \dots$ is uniformly distributed in the group U .

Proof: Let $\pi_l(x)$ denote the number of primes $\leq x$ which lie in the arithmetic progression $mk + l$. Then the following expression is well known.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{q_n \leq x \\ (q_n, m)=1}} \chi(q_n) &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l, m)=1}}^m \chi(l) \pi_l(x) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l, m)=1}}^m \chi(l) \left\{ \frac{1}{\varphi(m)} Li(x) + O(x \exp \{-\gamma \sqrt{\log x}\}) \right\} \\ &= \sum \chi(l) \cdot O\{x \exp \{-\gamma \sqrt{\log x}\}\} = O(x \exp \{-\gamma \sqrt{\log x}\}). \end{aligned}$$

Here γ is a suitable positive constant which occurs in the estimate $\pi_l(x) = \varphi(m)^{-1} Li(x) + O(x \exp \{-\gamma \sqrt{\log x}\})$ which is well known in the analytic theory of numbers. (Compare for instance Landau's Handbuch). Hence if $\pi(x)$ denotes the number of all primes $\leq x$, then the above implies

$$\pi(x)^{-1} \cdot \sum_{\substack{q_n \leq x \\ (q_n, m)=1}} \chi(q_n) = 0 \quad (\log x \cdot \exp \{-\sqrt[2]{\log x}\}) \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow \infty.$$

On the other hand it is clear that $\sum_{\substack{n=1 \\ (q_n, m)>1}}^N \hat{u}(u(q_n)) = o(N)$. Hence

$$\sum_{n=1}^N \hat{u}(u(q_n)) = o(N) \text{ as desired.}$$

Remark. If p is a fixed prime number then q_n is an element of U_p for all $q_n \neq p$. Replace this one $q_n = p$ by an arbitrary element of U_p , then the above implies that the sequence of elements of U_p so obtained is uniformly distributed in U_p . Indeed if $\hat{u} = \hat{u}_p$, then $\hat{u}(u(q_n)) = \hat{u}_p(q_n)$ for $q_n \neq p$, where $\hat{u}_p(q_n)$ the argument q_n has to be considered as an element of U_p for $q_n \neq p$.

4. Proposition 3.2 implies the following relationship between the *Haar*-measure on U and the concept of natural density of the theory of numbers. If P denotes the set of all prime numbers and $u(P)$ the image of P in U under the one-one mapping $a \rightarrow u(a)$ defined by (2.2), then U induced a topology on the subset $u(P)$ and thus by the one-one mapping $a \rightarrow u(a)$ we obtain a certain topology on the set P of all primes. Let M be an arbitrary subset of P and $\overline{M}$ its closure in P in the topology thus induced on P . Denote by $u(M)$ the image of M in U and by $\overline{u(M)}$ the closure of the set $u(M)$ in U . Then we have the following result: The set $\overline{M}$ has a natural density $w(\overline{M})$ whose value is equal to the *Haar*-measure of the subset $\overline{u(M)}$ of U . To prove this observe that if $u(p) \in u(M)$ for any $p \in P$ then $p \in \overline{M}$ by the very nature of our induced topology. Hence the number of those of the first N prime numbers $q_1, \dots, q_N$ which lie in $\overline{M}$ is the same as the number of elements $u(q_1), \dots, u(q_N)$ which lie in $\overline{u(M)}$. On dividing both of these numbers by N and taking the limit we see that one limit exists if and only if the other does and

$$\lim_{N \rightarrow \infty}$$

then they are equal. The latter exists and equals the *Haar*-measure of $\overline{u(M)}$ by proposition 3.2, and the elementary properties of a uniformly distributed sequence, since $\overline{u(M)}$ is a closed subset of U . This proves the assertion.

Incidentally, if we apply proposition 3.1, we see that the natural density $w(\overline{U})$ of $\overline{U}$ is also equal to $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \{\text{number of those among the elements } u(1), u(2), \dots, u(N) \text{ which lie in } \overline{u(M)}\}$.

5. One can apply the above to the following situation. Let c_n be a sequence of complex numbers about which we assume that the equation $\Phi(u(n)) = c_n$ defines a uniformly continuous function on the subset of U which consists of $u(1), u(2), \dots, u(n), \dots$. Since any uniformly distributed sequence forms of course a dense subset, proposition 3.1 implies that $\Phi(u(n))$ can be extended uniquely to a continuous function $\Phi(u)$ defined on the whole of U . Using the same proposition 3.1 again we see that $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c_n$ exists and equals $\int_U \Phi(u) d\mu(u)$. Hence by a well known property of *Dirichlet* series the series

$$\Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s} \quad (5.1)$$

converges for $R(s) > 1$ and $\lim_{s \rightarrow 1+0} (s-1) \Psi(s)$ exists and equals $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c_n$.

Hence

$$\lim_{s \rightarrow 1+0} (s-1) \Psi(s) = \int_U \Phi(u) d\mu(u). \quad (5.2)$$

(The mere absolute convergence of the series (5.1) for $R(s) > 1$ follows of course more easily from the fact that c_n is bounded.)

Next consider

$$\Psi_1(s) = \sum_p c_p p^{-s} \quad (5.3)$$

which again converges absolutely for $R(s) > 1$. From our continuity assumptions (which it would incidentally have been sufficient to state for c_p instead of for all c_n) together with proposition 3.2 it follows that $\lim_{N \rightarrow \infty} \pi(N)^{-1} \sum_{p \leq N} c_p$ exists and equals $\int_U \Phi(u) d\mu(u)$.

Let us now assume that the c_p are in addition such the abscissa Γ of convergence of the *Dirichlet* series (5.3) satisfies $0 \leq \Gamma < 1$. Then $\sum_{p \leq N} c_p = O(N^{\Gamma+\varepsilon})$. But $\pi(N)^{-1} N^{\Gamma+\varepsilon} \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$ when $\Gamma+\varepsilon < 1$.

Hence $\pi(N)^{-1} \sum_{p \leq N} c_p \rightarrow 0$. Thus

$$0 \leq \Gamma < 1 \text{ implies } \int_U \Phi(u) d\mu(u) = 0. \quad (5.4)$$

From this it follows that if in addition we have $c_p \geq 0$ then $\sum_p c_p p^{-s}$ must have a singularity at $s = 1$ (unless of course $c_p = 0$ for all p). Indeed if $c \geq 0$ for all (but a finite number of) primes p then $\Phi(u) \geq 0$

for all $u \in U$. Hence $\int \Phi(u) d\mu(u) > 0$ (unless $\Phi(u) = 0$ for all $u \in U$). Hence using (5.4) and the fact $\Gamma \leq 1$ anyway, we see that $\int \Phi(u) d\mu(u) \neq 0$ implies $\Gamma = 1$. Hence $\sum c_p p^{-s}$, being a *Dirichlet* series with non-negative coefficients, must have a singularity at $s = 1$. These properties of $\Psi(s)$ and $\Psi_1(s)$ will be used elsewhere. They can be used for example in a study of linear combinations of *Dirichlet L-series* $L(s, \chi)$ of the form $\sum f(\chi) L(s, \chi)$ whenever $f(\chi)$ is a complex-valued function of the (primitive) congruence character χ satisfying $\sum f(\chi) < \infty$. This will be carried out elsewhere.

6. Instead of the field $\mathcal{Q}$ of rational numbers one take an arbitrary algebraic number field K or a field K of algebraic functions of transcendence degree 1 over a field of constants with a finite number of elements. The above group U must then be replaced by *Chevalley's*² group C of idele classes modulo the connected component of the identity. This group C is a compact topological commutative group and its continuous characters are in natural one-one correspondence with the primitive congruence characters of the ideals of K . One can then define a mapping of the group of ideals of K (divisors of K in the case of function fields) into the group C such that analogues of propositions 3.1 and 3.2 hold and hence also analogues of their above consequences.

Indeed let p denote now an arbitrary (finite or infinite) prime of K and K_p the completion of K in the p -adic metric. Let b_p be an idele in the sense of *Chevalley*², i. e. for each p the „component” b_p is an element of K_p which is a unit of K_p for all but a finite number of p . If one denotes by J the (multiplicative) group of all ideles b_p and by D the connected component of the identity in J then C is defined to be the factorgroup J/DK^* , where K^* is the multiplicative group of K considered as the subgroup of the „principal ideles” of J . Now choose for each Nonarch median prime q of K an element e_q of order one in K_q (a local uniformizing element in the case of function fields). And define an idele $b(q)_p$ by the condition

$$b(q)_p = \begin{cases} e_q & \text{if } p = q \\ 1 & \text{if } p \neq q. \end{cases} \quad (6.1)$$

² C. Chevalley, Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies, J. de Liouville (IX), 15 (1936), p. 359; La théorie du corps de classes, Annals of Math. 41 (1940), p. 394. See also A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, J. Math. Soc. of Japan 3 (1951), p. 2.

This is easily seen to be a one-one mapping of the set of all Nonarchimedean primes of K into J , which can therefore be extended by multiplication to an isomorphism of the group I of ideals (divisors) of K into J . And it is easily seen that under the natural homomorphism of J onto $C = J/DK^*$ the image of I in J is mapped one-one. Hence we obtain an isomorphic mapping of the group I into C . And if one orders the integral elements of I according to their norm (but otherwise arbitrarily) then it can be proved that the image of the integral ideals (divisors) forms under this ordering a uniformly distributed sequence in the compact group C and so does the subsequence of primes. The proof uses a known estimates for character sums and is entirely similar to the proofs of propositions 3.1 and 3.2 above and need therefore not be given in detail. And the embedding of I in C can be used to study the one-one correspondence between the continuous characters of C and the congruence characters of K as was done in § 2 above for the case $K = \mathbb{Q}$. If one wishes to include also *Hecke's* Größencharaktere one has to take instead of the group C another compact group J_1 , the so called group of idele classes of absolute value 1 (which is defined for example by *A. Weil* in loc. cit.² and denoted by C_k^0 there). After an easy modification of (6.1) one obtains an isomorphism of I into J_1 such that analogues of §§ 3, 4 and 5 hold again. In particular the integral ideals and the prime ideals form under this embedding two uniformly distributed sequences in J_1 .

Instead of considering only the "Abelian" congruence characters of K as has been done above, one can also include Nonabelian congruence characters. We conclude by outlining how this is done. Let G be the (compact topological) *Galois* group of any separable algebraic extension K' of K which contains the maximal Abelian algebraic extension of K . For simplicity assume that in the case where K is a function field K' contains no constantfield extension of infinite degree over K . Defining the Artin symbol appropriately for the infinite extension K'/K , one obtains a one-one mapping which associates with each prime of K a class of conjugate elements of G . And when ordered according to their norm the image of the sequence of primes so obtained is a uniformly distributed sequence in the space of all classes of conjugate elements of G (not in G itself). However it does not seem possible to extend this mapping in a natural manner to a one-one mapping defined for all integral ideals (or divisors) of K at the present time. One can also combine the Artin characters of K (i. e. the characters of the irreducible

matrix representations of G) with the *Hecke* characters of K by using the construction of *A. Weil* (loc. cit) and obtain a uniformly distributed one-one image of the sequence of primes of K in the space of classes of conjugate elements in the non-commutative compact groups introduced by *A. Weil*. This can be done by an extension of the above method.

Zur Theorie der verallgemeinerten Pochhammerschen Differentialgleichung.*

Von

E. Höfinger, Wien.

(Eingelangt am 23. April 1953.)

*G. D. Birkhoff*¹ formulierte und bewies die Lösbarkeit des verallgemeinerten *Riemann'schen Problems*, eine Funktionenschar zu bestimmen, welche einem gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit m -singulären Stellen vom Range q_i ($i = 1, 2, \dots, m$) genügt, die Monodromiegruppe, die determinierenden Faktoren und die charakteristischen Konstanten sind gegeben. Im allgemeinen ist das Differentialgleichungssystem bzw. die Differentialgleichung n ter Ordnung durch Vorgabe der determinierenden Faktoren und der charakteristischen Konstanten nicht eindeutig bestimmt, indem in der Differentialgleichung noch akzessorische Parameter auftreten. Legt man den singulären Stellen jedoch weitere Bedingungen auf, so können auch im Falle des Auftretens von Unbestimmtheitsstellen gewisse Klassen linearer Differentialgleichungen n ter Ordnung durch das Verhalten ihrer Lösungen an den singulären Punkten eindeutig charakterisiert werden². Im folgenden soll dies für die Lösungen der verallgemeinerten *Pochhammerschen Differentialgleichung* durchgeführt werden. Im Falle $n = 2$ ergeben sich als Spezialfälle neben der *Gaußschen hypergeometrischen Differentialgleichung* die konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichungen. Zufolge der eindeutigen Charakterisierung dieser Differentialgleichungen kann man der *Riemann'schen P-Funktion* ent-

* Der wesentliche Inhalt dieser Arbeit befindet sich bereits in der Dissertation des Verfassers (Wien 1950), der sich an dieser Stelle bei Herrn Professor Hlawka für die Anregung zu obigem Dissertationsthema bedanken möchte. Der Verfasser wurde durch einen Brief von Professor L. Koschmieder zur vereinfachten Niederschrift dieser Arbeit veranlaßt.

¹ *G. D. Birkhoff*: The generalized *Riemann problem* for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q -difference equations. *Proc. Am. Ac. of Arts and Sciences*, XLIX, 6. 521—568 (1913).

sprechend auch hier Funktionen einführen, wobei sich dann die bekannten Beziehungen zwischen den einzelnen Differentialgleichungen als Transformationen dieser Funktionen darstellen.

1.

Die verallgemeinerte *Pochhammer'sche* Differentialgleichung³.

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) y^{(n)} - \left[\frac{\lambda-n}{1} \varphi_0'(z) + \psi(z) \right] y^{(n-1)} + \frac{\lambda-n+1}{1} \left[\frac{\lambda-n}{2} \varphi_0''(z) + \right. \\ \left. + \psi'(z) \right] y^{(n-2)} + \dots + (-1)^i \frac{(\lambda-n+1) \dots (\lambda-n+i-1)}{(i-1)!} \left[\frac{\lambda-n}{i} \varphi_0^{(i)}(z) + \right. \\ \left. + \psi^{(i-1)}(z) \right] y^{(n-i)} + \dots + (-1)^n \frac{(\lambda-n+1) \dots (\lambda-1)}{(n-1)!} \left[\frac{\lambda-n}{n} \varphi_0^{(n)}(z) + \right. \\ \left. + \psi^{(n-1)}(z) \right] y = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varphi_0(z) = (z-a_1)^{k_1+1} (z-a_2)^{k_2+1} \dots (z-a_\rho)^{k_\rho+1}$$

$$\psi(z) = \varphi_0(z) \left\{ \sum_{i=1}^{\rho} \left[\frac{-k_i c_{ki}^i}{(z-a_i)^{k_i+1}} - \dots - \frac{c_1^i}{(z-a_i)^2} + \frac{b_i+k_i}{z-a_i} \right] + \right. \\ \left. + c_1 + 2c_2 z + \dots + k c_k z^{k-1} \right\}$$

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_\rho + k + \rho$$

kann als die einzige lineare Differentialgleichung n ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten charakterisiert werden, welche die Punkte $z = a_1, a_2, \dots, a_\rho, \infty$ als singuläre Stellen besitzt und für $z = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, \rho$) formal durch $n-1$ nach ganzen positiven Potenzen von $z-a_i$ fortschreitende Reihen und durch eine Normalreihe mit dem determinierenden Faktor

$$\begin{aligned} e^{p_i(z-a_i)} (z-a_i)^{b_i-1+\lambda(k_i+1)} \\ T_j^i(z) = Q_j^i(z-a_i) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \\ T_n^i(z) = e^{p_i(z-a_i)} (z-a_i)^{b_i-1+\lambda(k_i+1)} Q_n^i(z-a_i) \end{aligned} \quad (2)$$

$$p_i(z-a_i) = \frac{c_{ki}^i}{(z-a_i)^{k_i}} + \frac{c_{k_i-1}^i}{(z-a_i)^{k_i-1}} + \dots + \frac{c_1^i}{z-a_i}$$

³ Für die verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen n ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkt bzw. für die gewöhnliche *Laplace'sche* Differentialgleichung n ter Ordnung mit linearen Koeffizienten wurde dies in den Arbeiten des Verfassers: *Monatsh. Math.* **56**, 126—136 (1952), **57**, 6—18

befriedigt wird, während für $z = \infty$ $n-1$ mit dem Faktor $(1/z)^{-\lambda+1}$ multiplizierte nach ganzen positiven Potenzen von $1/z$ fortschreitende Reihen und eine Normalreihe mit dem determinierenden Faktor $e^{p(z)} (1/z)^{b+\lambda(k-1)}$

$$\begin{aligned} T_j^\infty(z) &= (1/z)^{-\lambda+1} Q_j^\infty(1/z) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \\ T_n^\infty(z) &= e^{p(z)} (1/z)^{b+\lambda(k-1)} Q_n^\infty(1/z) \\ p(z) &= c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \dots + c_1 z \\ b &= -b_1 - b_2 - \dots - b_\varrho + \varrho \end{aligned} \quad (3)$$

formale Lösungen sein sollen.

Zufolge der Voraussetzung kann der Koeffizient $P_j(z)$ von $y^{(n-j)}(z)$ ($P_0(z) \equiv 1$) in der Differentialgleichung für $z = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, \varrho$) nur einen Pol $k_i + 1$ -ter Ordnung besitzen. Dies ergibt sich ganz entsprechend dem *Poincaréschen* Satz⁴, indem in den Determinantenquotienten

$$P_j(z) = - \frac{\Delta_{n,j}}{\Delta}$$

im Zähler bzw. Nenner für $z = a_i$ höchstens Pole $n(k_i+1)$ bzw. $(n-1)(k_i+1)$ -ter Ordnung* auftreten, und da man ohne Einschränkung annehmen kann, daß die nach ganzen positiven Potenzen von $z - a_i$ fortschreitenden Normalreihen $T_j^i(z)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) als niederste Potenz $(z - a_i)^{j-1}$ enthalten, besitzt der Nenner genau Pole $(n-1)(k_i+1)$ -ter Ordnung. Die Differentialgleichung besitzt somit notwendig die Gestalt:

$$\varphi_0(z) y^{(n)}(z) + \varphi_1(z) y^{(n-1)}(z) + \dots + \varphi_n(z) y(z) = 0 \quad (4)$$

$$\varphi_0(z) = (z - a_1)^{k_1+1} (z - a_2)^{k_2+1} \dots (z - a_\varrho)^{k_\varrho+1}$$

$$\varphi_i(z) \text{ ganz rational bzw. } \mathfrak{b} = z \frac{d}{dz} \left(\frac{d^i}{dz^i} = \frac{\mathfrak{b}(\mathfrak{b}-1)\dots(\mathfrak{b}-(i-1))}{z^i} \right),$$

$$\frac{\varphi_i(z)}{\varphi_0(z)} = P_i(z),$$

$$[\mathfrak{b}(\mathfrak{b}-1)\dots(\mathfrak{b}-(n-1)) + P_1(z) z \mathfrak{b}(\mathfrak{b}-1)\dots(\mathfrak{b}-(n-2)) + \dots + P_n(z) z^n] y = 0 \quad (5)$$

(1953) gezeigt. — In der zweiten Arbeit fehlt auf S. 7, Z. 1 v. u.: = 0. In der ersten Arbeit gehört auf S. 129, Z. 16 v. o. statt mindestens eine der ...: alle

³ *M. C. Jordan*: Cours d'analyse, T. 3, 240—251 (1896), *E. L. Ince*: Ordinary differential equations, 454—460 (1926).

⁴ *H. Poincaré*: Acta Math. 8, 305 (1886) bzw. *A. R. Forsyth*: Theory of differential equations IV, 271—273 (1902), *E. L. Ince*.³ 428—429.

* Besser: negative Potenzen.

Setzt man nun $y(z) = z^\gamma y_1(z)$ und dann

$$z = 1/t, \quad (b(z^\alpha f(z)) = z^\alpha (b + \alpha) f(z), \quad b_{i/z} = -b_z)$$

ein:

$$[(b-\gamma)(b-\gamma+1)\dots(b-\gamma+n-1) - P_1(1/t) 1/t (b-\gamma) \dots (b-\gamma+n-2) + \dots + (-1)^n P_n(1/t) 1/t^n] y_1 = 0 \quad (6)$$

und bringt diese Differentialgleichung in eine (5) entsprechende Gestalt, so können zufolge der Voraussetzung und obigem die Koeffizienten von

$$t^i b(b-1) \dots (b-(n-i-1)) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{d_1}{t} - P_1(1/t) \frac{1}{t^2}, \quad \frac{d_2}{t^2} - P_1(1/t) \frac{d_3}{t^3} + P_2(1/t) \frac{1}{t^4},$$

$$\dots \frac{d}{t^n} - P_1(1/t) \frac{e}{t^{n+1}} + \dots + (-1)^n P_n(1/t) \frac{1}{t^{2n}}$$

höchstens Pole $k+1$ -ter Ordnung besitzen, so daß

$$\varphi_1(1/t) = \frac{\varphi_0(1/t)}{t^{k-1}} Q(t) = \frac{1}{t^{k+k_1+k_2+\dots+k_\varrho+\varrho-1}} \bar{Q}(t) = \frac{1}{t^{n-1}} \bar{Q}(t)$$

und somit allgemein $\varphi_i(z)$ vom Grade $n-i$ ($i=1, 2, \dots, n$) ist. Da für jeden singulären Punkt

$$P_1(z) = -\frac{d}{dz} \log \Delta$$

gilt, ergibt sich für $P_1(z)$ sofort:⁵

$$P_1(z) = \sum_{i=1}^{\varrho} \left[\frac{k_i c_{k_i}^i}{(z-a_i)^{k_i+1}} + \dots + \frac{c_1^i}{(z-a_i)^2} - \frac{b_i-1+(k_i+1)(\lambda-n+1)}{z-a_i} \right] - c_1 - 2c_2 z - \dots - k c_k z^{k-1} \\ = - \left[\frac{\lambda-n}{1} \frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)} + \frac{\psi(z)}{\varphi_0(z)} \right] \quad (7)$$

$\varphi_0(z), \psi(z)$ aus (1).

Setzt man in der Differentialgleichung (4) $y = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^{\gamma-1-j}$ ein:

$$\sum_{j=0}^{\infty} d_j z^{\gamma-1-j} [\varphi_0(z) (\gamma-1-j) (\gamma-2-j) \dots (\gamma-n-j) + \varphi_1(z) z (\gamma-j-1) \dots (\gamma-(n-1)-j) + \dots + \varphi_n(z) z^n] = 0 \quad (8)$$

⁵ Es ist hierbei vorteilhaft, für die n te Normallösung die logarithmischen Ableitungen zu verwenden, vgl. *Fabry: Theses* (Paris 1885), 65–66, bzw. *A. R. Forsyth*.⁴ 262–263, *E. L. Ince*.³ 424–425; für $z = \infty$ kann man die Determinante für $t = 0$ in (6) berechnen.

so ergibt Nullsetzen des Koeffizienten von $z^{\gamma+n-1}$

$$f_0(\gamma) = \frac{\varphi_0^{(n)}(0)}{n!}(\gamma-1)(\gamma-2)\dots(\gamma-n) + \frac{\varphi_1^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}(\gamma-1)\dots(\gamma-(n-1)) + \\ + \frac{\varphi_2^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}(\gamma-1)\dots(\gamma-(n-2)) + \dots + \varphi_n(0) = 0$$

Diese Gleichung muß für $\gamma = \lambda, \lambda-1, \dots, \lambda-(n-2)$ erfüllt sein. Da die Koeffizientendeterminante der $n-1$ letzten Spalten dieses Gleichungssystems für $\varphi_i^{(n-i)}(0)$ nicht verschwindet ($=(-1)^n$), können $\varphi_2^{(n-2)}(0), \dots, \varphi_n(0)$ aus $\varphi_0^{(n)}(0)$ und $\varphi_1^{(n-1)}(0)$ eindeutig berechnet werden. Man sieht sofort, indem man die erste Gleichung dieses Gleichungssystems betrachtet, daß nach Benützung von $\varphi_1(z) = -[(\lambda-n)\varphi_0'(z) + \psi(z)]$ (7)

$$\frac{\varphi_i^{(n-i)}(0)}{(n-i)!} = (-1)^i \frac{(\lambda-n+1)\dots(\lambda-n+i-1)}{(i-1)!} \left[\frac{\lambda-n}{i} \frac{\varphi_0^{(n)}(0)}{(n-i)!} + \frac{\psi^{(n-1)}(0)}{(n-i)!} \right]$$

ist. Durch Nullsetzen des Koeffizienten von $z^{\gamma-1+n-r}$ ergibt sich aus (8)

$$d_r f_0(\gamma-r) + d_{r-1} f_1(\gamma-r+1) + \dots + d_0 f_r(\gamma) = 0$$

$$f_j(\gamma) = \frac{\varphi_0^{(n-j)}(0)}{(n-j)!}(\gamma-1)\dots(\gamma-n) + \frac{\varphi_1^{(n-1-j)}(0)}{(n-1-j)!}(\gamma-1)\dots(\gamma-(n-1)) + \\ + \dots + \varphi_{n-j}(0)(\gamma-1)\dots(\gamma-j) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-2).$$

Diese Gleichung muß für die obigen Werte von γ erfüllt sein, da insbesondere für $\gamma = \lambda, \lambda-1, \dots, \lambda-(n-2-r)$ $f_0(\gamma-r) = f_1(\gamma-r+1) = \dots = f_{r-1}(\gamma-1) = 0$ ist (Induktion), ergeben sich aus den $n-1-r$ Gleichungen $f_r(\lambda) = 0, f_r(\lambda-1) = 0, \dots, f_r(\lambda-(n-2-r)) = 0$, da die Koeffizientendeterminante von $\varphi_2^{(n-2-r)}(0), \dots, \varphi_{n-r}(0)$ für $\lambda \neq 1, 2, \dots, n-2 \neq 0^*$ ist, letztere Größen eindeutig durch $\varphi_0^{(n-r)}(0), \varphi_1^{(n-1-r)}(0)$ bestimmt:

$$\frac{\varphi_i^{(n-r-i)}(0)}{(n-i-r)!} = (-1)^i \frac{(\lambda-n+1)\dots(\lambda-n+i-1)}{(i-1)!} \left[\frac{\lambda-n}{i} \frac{\varphi_0^{(n-r)}(0)}{(n-i-r)!} + \right. \\ \left. + \frac{\psi^{(n-r-1)}(0)}{(n-i-1)!} \right] \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n-i, i = 2, 3, \dots, n)$$

Somit ist⁶

$$^* = (-1)^{n-r} [(\lambda-1)\dots(\lambda-r)] [(\lambda-2)\dots(\lambda-r-1)] \dots [(\lambda-1-(n-2-r))\dots(\lambda-r-(n-2-r))]$$

⁶ In der Dissertation des Verfassers wurde der Beweis entsprechend dem Pochhammer'schen Beweis (J. f. r. a. Math. 71, 1870, 316-352) durchgeführt und konnte durch Einführung der b -Operatoren in obige Gestalt vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}
 \varphi_i(z) &= \sum_{r=0}^{n-i} \frac{\varphi_i^{(n-i-r)}(0)}{(n-i-r)!} z^{n-i-r} = \\
 &= (-1)^i \frac{(\lambda-n+1) \dots (\lambda-n+i-1)}{(i-1)!} \left[\frac{\lambda-n}{i} \sum_{r=0}^{n-i} \frac{\varphi_0^{(n-r)}(0)}{(n-i-r)!} z^{n-i-r} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{r=0}^{n-i} \frac{\psi^{(n-r-1)}(0)}{(n-i-r)!} z^{n-i-r} \right] = \\
 &= (-1)^i \frac{(\lambda-n+1) \dots (\lambda-n+i-1)}{(i-1)!} \left[\frac{\lambda-n}{i} \varphi_0^{(i)}(z) + \psi^{(i-1)}(z) \right] \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

Eine Funktionenschar mit den auf S. 318 angegebenen Eigenschaften, welche einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten genügt, ist somit eindeutig bestimmt.⁷

$$y = G \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\varrho & \infty \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda+1 \\ b_{1-1+\lambda}(k_1+1) & b_{2-1+\lambda}(k_2+1) & \dots & b_{\varrho-1+\lambda}(k_\varrho+1) & b+\lambda(k-1) \\ c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^\varrho & c_1 \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^\varrho & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k_1}^1 & c_{k_1}^2 & \dots & c_{k_\varrho}^\varrho & c_k \end{vmatrix} z \quad (9)$$

$$b = -b_1 - b_2 - \dots - b_\varrho + \varrho$$

wobei, falls nicht alle k_i , k gleich sind, durch Hinzusetzen von Nullen stets ein rechteckiges Schema angenommen werden soll.

Allgemein ist somit bewiesen, daß es nur eine einzige Funktionenschar gibt, welche 1. einer linearen Differentialgleichung n ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, $n = k_1 + k_2 + \dots + k_\varrho + k_{\varrho+1} + \varrho$, genügt, 2. an den singulären Stellen $z = a_1, a_2, \dots, a_\varrho, a_{\varrho+1}$ formal durch Reihen

$$\begin{aligned}
 T_j^i(z) &= (z-a_i)^{\lambda_i + j-1} Q_j^i(z-a_i) & i = 1, 2, \dots, \varrho+1, \\
 T_n^i(z) &= e^{p_i(z-a_i)} (z-a_i)^{d_i} Q_n^i(z-a_i) & j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (10) \\
 p_i(z-a_i) &= \frac{c_{k_i}^i}{(z-a_i)^{k_i}} + \frac{c_{k_i-1}^i}{(z-a_i)^{k_i-1}} + \dots + \frac{c_1^i}{z-a_i}
 \end{aligned}$$

$Q_j^i(z-a_i)$, $Q_n^i(z-a_i)$ nach ganzen positiven Potenzen von $z-a_i$ fortschreitend ($Q_j^i(0)$, $Q_n^i(0) \neq 0$), befriedigt wird, wobei

⁷ An Stelle der zweiten Zeile müßten eigentlich $n-1$ Zeilen je mit den Exponenten $0, 1, 2, \dots, n-2$ bzw. $-\lambda+1, -\lambda+2, \dots, -\lambda+n-1$ gesetzt werden. Entsprechendes gilt auch für (12). Die dritte bis letzte Zeile sind eng verbunden.

$$\sum_{i=1}^{\varrho+1} d_i - (n-1) \left(1 - \sum_{i=1}^{\varrho+1} \lambda_i\right) = 0 \quad (11)$$

sein muß:

$$y = G \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{\varrho} & a_{\varrho+1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{\varrho} & \lambda_{\varrho+1} \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{\varrho} & d_{\varrho+1} \\ c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^{\varrho} & c_1^{\varrho+1} \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^{\varrho} & c_2^{\varrho+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{k_1}^1 & c_{k_1}^2 & \dots & c_{k_{\varrho}}^{\varrho} & c_{k_{\varrho}}^{\varrho+1} \end{vmatrix} z \quad (12)$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} G \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{\varrho} & a_{\varrho+1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{\varrho} & \lambda_{\varrho+1} \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{\varrho} & d_{\varrho+1} \\ \sim & & & & \end{vmatrix} z &= G \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_{\varrho} & \infty \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{\varrho} & \lambda_{\varrho+1} \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{\varrho} & d_{\varrho+1} \\ \sim & & & & \end{vmatrix} \zeta = \\ &= (\zeta - a'_1)^{\lambda_1} (\zeta - a'_2)^{\lambda_2} \dots (\zeta - a'_{\varrho})^{\lambda_{\varrho}} \\ G \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_{\varrho} & \infty \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda+1 \\ b_1-1+\lambda(k_1+1) & b_2-1+\lambda(k_2+1) & \dots & b_{\varrho}-1+\lambda(k_{\varrho}+1) & b+\lambda(k_{\varrho+1}-1)\zeta \\ \sim & & & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{\varrho} - \lambda_{\varrho+1}, \quad b_i = 1 - \lambda(k_i + 1) + d_i - \lambda_i, \quad (i = 1, 2, \dots, \varrho), \quad (13)$$

$$b = -\lambda(k_{\varrho+1} - 1) + d_{\varrho+1} + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{\varrho}$$

wobei $\zeta, a'_1, a'_2, \dots, a'_{\varrho}$ durch dieselbe lineare Transformation aus $z, a_1, a_2, \dots, a_{\varrho}$ hervorgehen, durch welche $z = a_{\varrho+1}$ in $\zeta = \infty$ transformiert wird. Aus (11) ergibt sich die Bedingung für b .

Die Differentialgleichung, welcher $y(z)$ in (12) genügt, ist

$$\begin{aligned} (g(z) &= (z - a_1)^{-\lambda_1} (z - a_2)^{-\lambda_2} \dots (z - a_{\varrho+1})^{-\lambda_{\varrho+1}} y(z)) \\ \varphi_0(z) g^{(n)}(z) &- \left[\frac{\lambda-n}{1} \varphi'_0(z) + \psi(z) \right] g^{(n-1)}(z) + \dots + \\ &+ (-1)^i \frac{(\lambda-n+1) \dots (\lambda-n+i-1)}{(i-1)!} \left[\frac{\lambda-n}{i} \varphi_0^{(i)}(z) + \psi_{(z)}^{(i-1)} \right] g_{(z)}^{(n-i)} + \\ &+ \dots + (-1)^n \frac{(\lambda-n+1) \dots (\lambda-1)}{(n-1)!} \left[\frac{\lambda-n}{n} \varphi_0^{(n)}(z) + \psi^{(n-1)}(z) \right] g(z) = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

$$\varphi_0(z) = (z-a_1)^{k_1+1} (z-a_2)^{k_2+1} \dots (z-a_{\varrho+1})^{k_{\varrho+1}+1}, \quad [\varphi_0(z)] = n+1$$

$$\psi(z) = \varphi_0(z) \sum_{i=1}^{\varrho+1} \left[\frac{-k_i c_i^j}{(z-a_i)^{k_i+1}} - \dots - \frac{c_1^i}{(z-a_i)^2} + \frac{b_i+k_i}{z-a_i} \right]$$

$$\lambda + \sum_{i=1}^{\varrho+1} b_i - \varrho = 0$$

wobei b_i , λ die Bedeutung aus (13) besitzen. Dies ergibt sich, indem wie für (1) bewiesen wird, daß die Differentialgleichung (14) für $g(z)$ die einzige lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten ist, welche für $z = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, \varrho+1$) einfache singuläre Stellen der Unbestimmtheit vom Range k_i mit den determinierenden Faktoren⁸ $e^{p_i(z-a_i)} (z-a_i)^{d_i-\lambda_i}$ ($i=1, 2, \dots, \varrho+1$), $p_i(z-a_i)$ aus (10), und $z = \infty$ als singuläre Stelle der Bestimmtheit mit den Exponenten $-\lambda+1, -\lambda+2, \dots, -\lambda+n$ besitzt.

2.

Der Existenzbeweis der Funktionenscharen (9), (12) ergibt sich aus der *Birkhoff'schen* Arbeit. Genau wie in den Fällen der Bestimmtheit kann dieser auch hier durch Lösung der Differentialgleichungen (1), (14) mittels bestimmter Integrale geführt werden. Die Integrallösungen für die Differentialgleichung (1) sind bekanntlich:⁹

$$y(z) = \int_L \left[\prod_{j=1}^{\varrho} \frac{c_{k_j}^j}{e^{(u-a_j)^{k_j}} + \dots + \frac{c_1^j}{u-a_j}} \right] e^{c_k u^{k_1} + \dots + c_1 u} (u-z)^{\lambda-1} du \quad (15)$$

bzw. für (14) ($y(z) = (z-a_1)^{\lambda_1} \dots (z-a_{\varrho+1})^{\lambda_{\varrho+1}} g(z)$)

$$y(z) = (z-a_1)^{\lambda_1} \dots (z-a_{\varrho+1})^{\lambda_{\varrho+1}} \cdot$$

$$\cdot \int_L \left[\prod_{j=1}^{\varrho+1} \frac{c_{k_j}^j}{e^{(u-a_j)^{k_j}} + \dots + \frac{c_1^j}{(u-a_j)}} \right] (u-z)^{\lambda-1} du \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{\varrho+1} (b_j-1) + \lambda - 1 = -2 \quad \text{aus (13) bzw. (11)}$$

⁸ D. h. für $z=a_i$, ($i=1, 2, \dots, \varrho+1$) soll die Differentialgleichung durch je $n-1$ nach ganzen positiven Potenzen von $z-a_i$ fortschreitende Reihen und durch eine Normalreihe mit dem determinierenden Faktor $e^{p_i(z-a_i)} (z-a_i)^{d_i-\lambda_i}$ befriedigt werden.

⁹ *M. C. Jordan*: ³ 241, *E. L. Ince*: ³ 454, *E. Kamke*: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I, 109 (1942). Zu (16) vgl. *Whittaker-Watson*:

Die Integrationswege sind entweder geschlossene Wege (Doppelschleifen) oder Schleifen, welche in die singulären Punkte innerhalb jener Sektoren hineinverlaufen, innerhalb welcher der Exponent der e -Potenz im Integranden negativ ist. Allgemein gibt es nur n linear unabhängige Integrale, durch welche sich alle übrigen Integrale ausdrücken lassen. Ordnet man für (1) dem Punkte $z = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, \varrho$) $a_{\varrho+1} = \infty$ die n -Integrale über die Integrationswege (z, a_i) , (a_1, a_2) , $(a_2, a_3) \dots (a_{i-2}, a_{i-1})$, (a_{i+1}, a_{i+2}) , $\dots (a_{\varrho}, \infty)$, $L_j^{q_l}$ zu, wobei (a_j, a_k) Doppelschleifen bzw. $L_j^{q_l}$ ($j = 1, 2, \dots, k_l$) Schleifen sind, die in aufeinanderfolgenden Sektoren des Punktes $u = a_l$ mit negativem Realteil des Exponenten der e -Potenz des Integranden beginnen bzw. endigen (ohne einen anderen singulären Punkt zu umkreisen), und (z, a_i) eine Schleife um den Punkt $u = z$ ist, welche innerhalb des gleichen negativen Sektors des Punktes $u = a_i$ beginnt bzw. endet, so lassen sich diese Integrale für $z = a_i$ konvergent bzw. asymptotisch in Reihen der auf S. 318 angegebenen Art entwickeln. Die $n - k_i - 1$ Integrale, welche den Punkt $u = a_i$ nicht als Integrationsgrenze besitzen, sind konvergent nach ganzen Potenzen von $z - a_i$ entwickelbar (in Übereinstimmung mit dem Perron'schen Satz)¹⁰. Insbesondere sind die k -Integrale über die Integrationswege L_j^∞ ganz transzendent, in Übereinstimmung mit einem Satze von Poincaré-Perron¹¹. Die k_i -Integrale $L_j^{a_i}$ sind innerhalb jenes größeren Sektors, welcher vom Integrationsweg nicht umschlossen wird (d. h. in der ganzen Umgebung von $z = a_i$ mit Ausnahme eines positiven Sektors) asymptotisch nach ganzen positiven Potenzen von $z - a_i$ entwickelbar. Dies ergibt sich sofort durch Anwendung des Ford'schen Kriteriums¹², welchem man nach Birkhoff die Gestalt geben kann: Existiert für eine in der Umgebung eines Punktes $z = a$ analytische Funktion $f(z)$ bei Annäherung innerhalb eines Sektors für alle Ableitungen beliebig hoher Ordnung $\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^i}{dz^i} f(z) = c_i$ ($i = 1, 2, \dots$), c_i endlich, so ist $f(z)$ innerhalb dieses Sektors asymptotisch nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ entwickelbar: $f(z) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i!} (z-a)^i$. Obige

A course of modern analysis, 4. Aufl. 291—292, bzw. E. Hossenfelder: Math. Ann. 4, 198 (1871).

¹⁰ O. Perron: Math. Ann. 70, 21 (1911).

¹¹ H. Poincaré: Am. J. of Math. 7 (1885), O. Perron:¹⁰ 23.

¹² W. B. Ford: Bull. Soc. Math. France 39, 347—352 (1911), bzw. G. D. Birkhoff:¹ 530—531. Vgl. auch: G. Doetsch: Annali della scuola Norm. Sup.-Pisa, V., III. Ser. (1951), S. 105—119.

Integrale und deren Ableitungen beliebig hoher Ordnung sind innerhalb jenes größeren Sektors gleichmäßig konvergent. Nimmt man etwa das Integral über den Integrationsweg $L_1^{a_1}$, welcher von der positiven reellen Achse zählend den ersten und zweiten negativen Sektor verbindet¹³

$$(u-a_1 = r e^{i\psi} : \psi = \frac{3\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1} - \varepsilon, r=0 \rightarrow r_0; r=r_0 \frac{3\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1} - \varepsilon \leq \psi \leq \frac{5\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1} + \varepsilon; \psi = \frac{5\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1} + \varepsilon, r=r_0 \rightarrow 0, \alpha_{k_1} = \arg c_{k_1}^1, \varepsilon > 0 \text{ bel. klein, so gilt für alle } |z-a_1| < M \text{ innerhalb des Sektors } (\varphi = \arg(z-a_1))$$

$$\frac{5\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1} + \varepsilon \leq \varphi \leq \frac{3\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1} + 2\pi - \varepsilon$$

$$\text{für } |u-a_1| < \frac{M \sin \varepsilon}{1 - \sin \varepsilon} \quad \left| \left(\frac{u-z}{u-a_1} \right)^{\lambda-i-1} \right| < K \left(1 + \frac{M}{|u-a_1|} \right)^{|\operatorname{Re}(\lambda-1-i)|}$$

wie sich durch eine geometrische Betrachtung ergibt. Die $n-1$ nach ganzen positiven Potenzen von $z-a_i$ fortschreitenden Reihen ergeben sich somit durch Entwicklung von $(u-z)^{\lambda-1}$ an der Stelle $z=a_i$, bzw. die mit $z^{\lambda-1}$ multiplizierten nach ganzen Potenzen von $1/z$ fortschreitenden Reihen durch Entwicklung von $(1-u/z)^{\lambda-1}$.

Auch die Integrale über die Integrationswege (a_i, a_j) lassen sich asymptotisch nach ganzen positiven Potenzen von $z-a_i$ entwickeln, falls der Integrand für $u=a_i$ exponentielles Verhalten zeigt und als Integrationsweg eine Schleife um $u=a_j$, welcher innerhalb des gleichen negativen Sektors in $u=a_i$ beginnt bzw. endet, genommen wird. Etwa das Integral, dessen Integrationsweg innerhalb des Sektors

$$\frac{-3\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1} < \arg(u-a_1) < \frac{-\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1}$$

in $u=a_1$ beginnt bzw. endet, innerhalb des Sektors

$$\frac{-3\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1} < \arg(z-a_1) < \frac{-\pi + 2\alpha_{k_1}}{2k_1} + 2\pi$$

Die Integrale über den Integrationsweg (z, a_i) , z. B. über (z, a_1) gehen durch die Transformation $u-a_1 = \frac{z-a_1}{(z-a_1)^{k_1} t + 1}$ über in

¹³ Für $\alpha_{k_1} \neq 0$ ergibt sich natürlich noch eine Drehung um den Winkel α_{k_1}/k_1 .

$$y = (-1)^\lambda e^{\frac{c_{k_1}^1}{(z-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{c_1^1}{z-a_1}} (z-a_1)^{b_1-1+\lambda(k_1+1)} \sum_{j=1}^{k_1} c_j^1 \sum_{i=1}^j (j_i) t^i (z-a_1)^{k_1 i-j} \int_{(0,\infty)} \left(\frac{z-a_1}{(z-a_1)^{k_1} t+1} + a_1 \right) [(z-a_1)^{k_1} t+1]^{-b_1-\lambda} t^{\lambda-1} dt \tag{15 a}$$

($f(u)$ für $u = a_1$ regulär), welches Integral offenbar in einem durch den ursprünglichen Integrationsweg und durch $\arg c_{k_1}^1$ bestimmten Sektor asymptotisch nach ganzen positiven Potenzen von $z-a_1$ entwickelbar ist.

Die Übergangs- bzw. erzeugenden Substitutionen der einzelnen Integrale findet man bei Jordan¹⁴. Die lineare Unabhängigkeit je n der oben definierten Integrale kann entsprechend dem von *Hossenfelder* durchgeführten Beweis gezeigt werden.¹⁵

3.

Für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Gestalt (14) ergeben sich die folgenden Möglichkeiten: 1. 3 singuläre Stellen der Bestimmtheit (*Riemann'sche* Differentialgleichung), 2. eine singuläre Stelle vom Range eins und eine singuläre Stelle der Bestimmtheit (*Kummer'sche*, *Laguerre'sche* Differentialgleichung), 3. eine singuläre Stelle vom Range zwei (*Hermite'sche* Differentialgleichung).

Die *Laguerre'sche* Differentialgleichung

$$z y'' + (\alpha + 1 - z) y' + h y = 0 \tag{17}$$

ist somit die einzige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, welche $z = 0$ als einfache singuläre Stelle der Bestimmtheit besitzt

$$y_1(z) = Q_1(z) \\ y_2(z) = z^{-\alpha} Q_2(z)$$

und für $z = \infty$ vom Range eins ist:

$$y_3(z) = z^h Q_3(1/z) \\ y_4(z) = e^z z^{-\alpha-h-1} Q_4(1/z)$$

¹⁴ 3.
¹⁵ 9.. Auch im Sinne von *Birkhoff* ist Abschn. II nicht vollständig, da für jeden der $2 k_1$ Sektoren des Punktes $z = a_1$ Fundamentalsysteme anzugeben sind, welche in obige Reihen entwickelt werden können. In (15 a) ist die Erfüllbarkeit eines gewissen *Abel'schen* Theorems zu zeigen, und kann vielleicht einfach auf jenes für *Laplace'sche* Integrale zurückgeführt werden, wie *G. Doetsch* dem Verfasser diesbezüglich antwortete.

$$y = G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ 0 & -h \\ -\alpha & \alpha+h+1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z$$

Aus der Definition ergeben sich sofort die Transformationsformeln:

$$G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ 0 & -h \\ -\alpha & \alpha+h+1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z = z^{-\alpha} G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ 0 & -h-\alpha \\ \alpha & h+1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z \quad (18)$$

$$= e^z G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ 0 & \alpha+h+1 \\ -\alpha & -h \\ 0 & -1 \end{vmatrix} z \quad (19)$$

$$= z^h G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ 0 & -h \\ \alpha+2 & h+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{z} \quad (20)$$

(19) stellt den allgemeinsten Ausdruck der *Kummer'schen* Transformation für die *Laguerre'schen* Funktionen dar¹⁶.

Die *Hermite'sche* Differentialgleichung

$$y'' - 2z y' + 2h y = 0 \quad (21)$$

ist die einzige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, welche nur $z = \infty$ als singuläre Stelle vom Range zwei besitzt:

$$y_1(z) = z^h Q_1(1/z)$$

$$y_2(z) = e^{z^2} z^{-h-1} Q_2(1/z)$$

$$y = G \begin{vmatrix} \infty \\ -h \\ h+1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} z$$

$$G \begin{vmatrix} \infty \\ -h \\ h+1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} z = e^{z^2} G \begin{vmatrix} \infty \\ h+1 \\ -h \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} z$$

¹⁶ Whittaker-Watson: 9. 338, E. E. Kummer: J. r. a. Math. 15, 139 (1836).

$$G \begin{vmatrix} \infty & & \\ -2h & & \\ 2h+1 & z & \\ 0 & & \\ 1 & & \end{vmatrix} = G \begin{vmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & -h & \\ 1/2 & h+1/2 & z^2 \\ 0 & 1 & \end{vmatrix}$$
$$G \begin{vmatrix} \infty & & \\ -2h-1 & & \\ 2h+2 & z & \\ 0 & & \\ 1 & & \end{vmatrix} = z G \begin{vmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & -h & \\ -1/2 & h+3/2 & z^2 \\ 0 & 1 & \end{vmatrix}$$

welche beiden letzteren Formeln den bekannten Zusammenhang zwischen der *Hermite*'schen und *Laguerre*'schen Differentialgleichung herstellen.

Durch konvergente bzw. asymptotische Entwicklung der Integrale (15) für obige Differentialgleichungen ergeben sich die bekannten konvergenten bzw. divergenten Reihen, welche obige Differentialgleichungen befriedigen.

Als spezielle Anwendung ergeben sich aus obigen Transformationsformeln die von *L. Koschmieder* untersuchten Ableitungsformeln für die *Laguerre*'schen und *Hermite*'schen Polynome¹⁷. Führt man (18), (19), (20) nacheinander aus:

$$G \begin{vmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & -h & \\ -\alpha & \alpha+h+1 & \\ 0 & 1 & \end{vmatrix} z = z^{-\alpha} e^z G \begin{vmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & h+1 & z \\ \alpha & -h-\alpha & \\ 0 & -1 & \end{vmatrix} =$$
$$= z^{-\alpha-h-1} e^z G \begin{vmatrix} 0 & 88 & \\ 0 & h+1 & 1 \\ -\alpha-2h-1 & \alpha+h+1 & \bar{z} \\ -1 & 0 & \end{vmatrix}$$

so ergibt sich aus den Integrallösungen

$$y(z) = \text{const. } z^{-\alpha} e^z \int_{(\infty, z)} e^{-u} u^{\alpha+h} (u-z)^{-h-1} du,$$
$$y_1(z) = \text{const. } z^{-\alpha-h-1} e^z \int_{(0, 1/z)} e^{-1/u} u^{-\alpha-1} (u-1/z)^{-h-1} du$$

für ganzes positives *h* einerseits die *Rodrigues*'sche Formel für die *Laguerre*'schen Polynome

¹⁷ *L. Koschmieder*: Beispiele des Gebrauchs gewisser Ableitungsformeln von *Liouville*, *Spitzer*, *Schlömilch*, *Rev. Hist. Am.* VI (1946).

$$y(z) = L_h^a(z) = z^{-a} e^z \frac{d^h}{dz^h} (e^{-z} z^{a+h})$$

andererseits $y_1(z) = \text{const. } z^{-a-h-1} e^z \frac{d^h}{d(z^{-1})^h} (e^{-z} z^{a+1})$, welche beiden Polynome bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen müssen, da die *Laguerre'sche* Differentialgleichung für $z = 0$ nur eine einzige unverzweigte Lösung besitzt. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$L_h^a(z) = z^{-a} e^z \frac{d^h}{dz^h} (e^{-z} z^{a+h}) = (-1)^h z^{-a-h-1} e^z \frac{d^h}{d(z^{-1})^h} (e^{-z} z^{a+1})$$

Entsprechend bekommt man aus den Transformationsformeln

$$\begin{aligned} G \begin{vmatrix} \infty & & \\ -2h-1 & & \\ 2h+2 & z & \\ 0 & & \\ 1 & & \end{vmatrix} &= e^{z^2} G \begin{vmatrix} \infty & & \\ 2h+2 & & \\ -2h-1 & z & \\ 0 & & \\ -1 & & \end{vmatrix} = e^{z^2} G \begin{vmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & h+1 & \\ 1/2 & -h-1/2 & z^2 \\ 0 & -1 & \end{vmatrix} = \\ &= e^{z^2} z^{-2h-2} G \begin{vmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & h+1 & 1/z^2 \\ -2h-3/2 & h+3/2 & \\ -1 & 0 & \end{vmatrix} = e^{z^2} G \begin{vmatrix} 0 & & \\ 2h+2 & 1/z & \\ -2h-1 & & \\ 0 & & \\ -1 & & \end{vmatrix} \\ G \begin{vmatrix} \infty & & \\ -2h & & \\ 2h+1 & z & \\ 0 & & \\ 1 & & \end{vmatrix} &= e^{z^2} G \begin{vmatrix} \infty & & \\ 2h+1 & & \\ -2h & z & \\ 0 & & \\ -1 & & \end{vmatrix} = z e^{z^2} G \begin{vmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & h+1 & \\ -1/2 & -h+1/2 & z^2 \\ 0 & -1 & \end{vmatrix} = \\ &= e^{z^2} z^{-2h-1} G \begin{vmatrix} 0 & \infty & \\ 0 & h+1 & 1/z^2 \\ -2h-1/2 & h+1/2 & \\ -1 & 0 & \end{vmatrix} = e^{z^2} G \begin{vmatrix} 0 & & \\ 2h+1 & 1/z & \\ -2h & & \\ 0 & & \\ -1 & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

durch Benützung der Integrallösungen (15), (16) für ganzes positives h die Ableitungsformeln für die *Hermite'schen* Polynome:

$$\begin{aligned} H_{2h+1}(z) &= (-1)^{2h+1} e^{z^2} \frac{d^{2h+1}}{dz^{2h+1}} e^{-z^2} = (-1)^h 2^{2h+1} e^{z^2} \frac{d^h}{d(z^2)^h} (e^{-z^2} z^{2h+1}) = \\ &= 2^{2h+1} z^{-2h-2} e^{z^2} \frac{d^h}{d(z^{-2})^h} (e^{-z^2} z^3) = e^{z^2} z^{-2h-2} \frac{d^{2h+1}}{d(z^{-1})^{2h+1}} (e^{-z^2} z^{-2h}) \end{aligned}$$

$$H_{2h}(z) = (-1)^{2h} e^{z^2} \frac{d^{2h}}{dz^{2h}} e^{-z^2} = (-1)^h 2^{2h} z e^{z^2} \frac{d^h}{d(z^2)^h} (e^{-z^2} z^{2h-1}) =$$

$$= 2^{2h} z^{-2h-1} e^{z^2} \frac{d^h}{d(z^{-2})^h} (e^{-z^2} z) = z^{-2h-1} e^{z^2} \frac{d^{2h}}{d(z^{-1})^{2h}} (e^{-z^2} z^{-2h+1})$$

Die der ersten Formelgruppe entsprechenden Integrallösungen sind z. B.

$$e^{z^2} \int_{(\infty, z)} e^{-u^2} (u-z)^{-2h-2} du, \quad e^{z^2} \int_{(\infty, z^2)} e^{-u} u^{h+1/2} (u-z^2)^{-h-1} du,$$

$$e^{z^2} z^{-2h-2} \int_{(0, 1/z^2)} e^{-\frac{1}{u}} u^{-\frac{3}{2}} (u-\frac{1}{z^2})^{-h-1} du, \quad e^{z^2} z^{-2h-2} \int_{(0, 1/z)} e^{-\frac{1}{u}} u^{2h} (u-\frac{1}{z})^{-2h-2} du.$$

Die sich hieraus für ganzes positives h ergebenden Polynome müssen bis auf konstante Faktoren übereinstimmen, da es nur eine Lösung der *Hermite'schen* Differentialgleichung geben kann, welche für $z = 0$ verschwindet, da ansonsten $z=0$ außerwesentlich singuläre Stelle der Differentialgleichung wäre. Ebenso gibt es für die zweite Formelgruppe nur eine Lösung, welche für $z = 0$ nicht verschwindet. Die Ableitungsformeln nach z^{-1} bzw. z^{-2} ergeben sich natürlich aus den Ableitungsformeln nach z bzw. z^2 , indem man in den Integraldarstellungen die Integrationsvariable u durch $1/u$ ersetzt.

Für die allgemeine Lösung der *Riemann'schen* Differentialgleichung stimmt die Funktion (12) mit der *Riemann'schen* P -Funktion überein. Auch die allgemeinen Lösungen der anderen Differentialgleichungen, welche sich auf die konfluenten hypergeometrischen Funktionen zurückführen lassen, können durch obige Funktionen (12) ausgedrückt werden:

Die *Kummer'sche* Differentialgleichung:

$$z y'' + (\gamma - z) y' - \alpha y = 0$$

$$y = G \left| \begin{array}{cc|c} 0 & \infty & \\ 0 & \alpha & \\ -\gamma+1 & \gamma-\alpha & z \\ 0 & 1 & \end{array} \right|$$

Die *Bessel'sche* Differentialgleichung:

$$y'' + \frac{1}{z} y' + (1 - \frac{n^2}{z^2}) y = 0$$

$$y = e^{iz} G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ n & 1/2 \\ -n & 1/2 \\ 0 & -2i \end{vmatrix} z = e^{-iz} G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ n & 1/2 \\ -n & 1/2 \\ 0 & 2i \end{vmatrix} z$$

Die Whittaker'sche Differentialgleichung:

$$y'' + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 - m^2}{z^2} \right\} y = 0$$

$$y = e^{-\frac{z}{2}} G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ -m+1/2 & -k \\ m+1/2 & +k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z = e^{\frac{z}{2}} G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ -m+1/2 & k \\ m+1/2 & -k \\ 0 & -1 \end{vmatrix} z$$

Die Weber'sche Differentialgleichung:

$$y'' + \{n + 1/2 - 1/4 z^2\} y = 0$$

$$y = e^{-\frac{z^2}{4}} G \begin{vmatrix} \infty \\ -n \\ n+1 \\ 0 \\ 1/2 \end{vmatrix} z = e^{\frac{z^2}{4}} G \begin{vmatrix} \infty \\ n+1 \\ -n \\ 0 \\ -1/2 \end{vmatrix} z$$

Die bekannten Zusammenhänge zwischen den einzelnen Differentialgleichungen ergeben sich dann als Folge der Transformationsformeln der obigen Funktionen, z. B. die zweite Kummer'sche Transformation¹⁸:

$$e^{-\frac{z}{2}} G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ 0 & \alpha \\ -2\alpha+1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z = z^{-\alpha+\frac{1}{2}} e^{i(\frac{z}{2})} G \begin{vmatrix} 0 & \infty \\ \alpha-1/2 & 1/2 \\ -\alpha+1/2 & 1/2 \\ 0 & -2i \end{vmatrix} \frac{iz}{2}$$

¹⁸ H. Buchholz: Die konfluente hypergeometrische Funktion, S. 7, (1953).

Beiträge zur numerischen Integration.

II. Der Fehler beim Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung.

Von

Erich Bukovics, Wien.

(Eingelangt am 29. Mai 1953.)

1. Einleitung.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹ wurde vom Verfasser eine Fehlerabschätzung für das Verfahren von *Blaess* zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung entwickelt. Es ergaben sich Formeln, die eine fortlaufende Abschätzung rekursiv und (mit Hilfe der Theorie der linearen Differenzengleichungen bzw. unter Verwendung des Matrizenkalküls) auch direkt gestatteten. Wie schon in [I] erwähnt, läßt sich die dort angewendete Methode auch auf das *Runge-Kutta*-Verfahren, für die eine solche Fehlerabschätzung für eine beliebige Anzahl von Schritten noch aussteht, ausdehnen. Dies soll in der vorliegenden Arbeit unter Zugrundelegung der von *Zurmühl* in [2]² angegebenen direkten Formeln durchgeführt werden. Anschließend werden die Ergebnisse mit den von *Bieberbach* in [5] für Differentialgleichungen erster Ordnung und Differentialgleichungen höherer Ordnung, die auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden, für den ersten Schritt entwickelten Formeln verglichen. Dann werden die Fehler des *Blaess*- und des *Runge-Kutta*-Verfahrens gegenübergestellt. Dabei wird an Hand von Beispielen gezeigt werden, daß ein Vergleich der Leistungsfähigkeit der Verfahren nur bei Durchführung der Abschätzung für mehrere Schritte einen

¹ „Beiträge zur numerischen Integration. I. Der Fehler beim *Blaess*'schen Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n -ter Ordnung“. Mh. f. Math., Bd. 57, Heft 3. Diese Arbeit wird im folgenden mit [I] zitiert.

² Die Literaturangaben beziehen sich auf das Literaturverzeichnis von [I].

richtigen Aufschluß über die tatsächliche Größenordnung des Fehlers ergibt. Die für Differentialgleichungen erster bis vierter Ordnung benötigten Fehlerformeln werden ausführlich angegeben. Auf die Angabe der Schemata für die Durchführung der Rechnung konnte verzichtet werden, da diese in dem zusammenfassenden Werk [4] enthalten sind.

2. Voraussetzungen.

Es sei eine Differentialgleichung n -ter Ordnung in der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y^{(v)}(x_0) = y_0^{(v)}, \quad v = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

vorgelegt. Die Lösung soll in eine Potenzreihe entwickelbar sein. Die Funktion f soll in einem konvexen Bereiche $\mathfrak{B}$ des $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ -Raumes, der die Lösungsfunktion und alle in Betracht kommenden Näherungen enthält, beschränkte erste partielle Ableitungen besitzen. Dann gilt in $\mathfrak{B}$ für f eine Lipschitzbedingung der Form

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) - f(x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)})| \leq K \cdot \sum_{v=0}^{n-1} |y^{(v)} - Y^{(v)}| \quad (3)$$

mit

$$K = \text{Max. } |f_{y^{(v)}}| \text{ in } \mathfrak{B}. \quad v = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3a)$$

Weiters sollen in $\mathfrak{B}$ die Abschätzungen gelten:

$$\left| \frac{d^3 f}{dx^3} \right| \leq M_3, \quad \left| \frac{d^4 f}{dx^4} \right| \leq M_4. \quad (4)$$

3. Das Runge-Kutta-Schema nach Zurmühl³.

Beim *Runge-Kutta*-Verfahren werden für äquidistante Argumente (Schrittweite h) Näherungswerte — im folgenden „verbesserte Werte“ genannt — berechnet, die durch „Mittelbildung“ aus Funktionswerten von f entstehen, als deren Argumente zwischengeschaltete „Grobwerte“ verwendet werden.

Die Grobwerte werden nach den Formeln:

³ Die Formeln dieses Abschnittes wurden aus [2] entnommen. Dabei wurden die Bezeichnungen etwas abgeändert und [I] angepaßt, um die gemeinsamen Grundzüge der Methode hervorzuheben. Bezüglich der Abkürzungen und Bezeichnungen vergleiche man daher [I], Abschnitte 3 und 4.

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_{m,1}^j &= \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} \frac{1}{2^{\sigma-j}} \tilde{v}_{m,0}^{\sigma} + \binom{n}{j} \frac{1}{2^{n-j}} \tilde{f}_{m,0} \frac{h^n}{n!} \\
\tilde{v}_{m,2}^j &= \tilde{v}_{m,1}^j \dots j = 0, 1, \dots, n-2 \\
\tilde{v}_{m,2}^{(n-1)} &= \tilde{v}_{m,0}^{(n-1)} + \binom{n-1}{1/2} \tilde{f}_{m,1} \frac{h^n}{n!} \\
\tilde{v}_{m,3}^j &= \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} \tilde{v}_{m,0}^{\sigma} + \binom{n}{j} \tilde{f}_{m,2} \frac{h^n}{n!} \quad j = 0, 1, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{5}$$

mit

$$\begin{aligned}
v_m^j &= y_m^{(j)} \frac{h^j}{j!}, \quad \tilde{v}_{m,i}^j = \tilde{y}_{m,i}^{(j)} \frac{h^j}{j!} \\
x_{m0} &= x_m, \quad x_{m1} = x_{m2} = x_m + h/2, \quad x_{m3} = x_m + h = x_{m+1} \\
\tilde{v}_{m,0}^j &= v_m^j, \quad \tilde{f}_{m,i} = f(x_{m,i}, \tilde{y}_{m,i}, \tilde{y}'_{m,i}, \dots, \tilde{y}_{m,i}^{(n-1)})
\end{aligned} \tag{6}$$

berechnet. Mit Hilfe der daraus gebildeten Mittel

$$K_m^j = \sum_{i=0}^3 \Gamma_{i,i}^j \tilde{f}_{m,i} \frac{h^n}{n!} \tag{7}$$

ergeben sich die verbesserten Werte zu:

$$v_{m+1}^j = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} v_m^{\sigma} + K_m^j. \tag{8}$$

Die Größen $\Gamma_{i,i}^j$ lassen sich so bestimmen, daß die Taylorentwicklungen der v_{m+1}^j bezüglich der v_m^j für $j = 0, 1, \dots, n-2$ bis zu Gliedern $(n+2)$ -ter Ordnung in h , für v_{m+1}^{n-1} sogar bis zu Gliedern $(n+3)$ ter Ordnung genau abgeglichen werden. Zur Gewinnung einer einfacheren Schreibweise ist es zweckmäßig, den Index j durch $n-p$ zu ersetzen. Dann lauten die Formeln für die Größen $\Gamma_{i,i}^j$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{n-p} &= \binom{n}{p} \frac{p^2}{(p+1)(p+2)}, \quad \Gamma_1^{n-p} = \Gamma_2^{n-p} = \binom{n}{p} \frac{2p}{(p+1)(p+2)}, \\
\Gamma_3^{n-p} &= \binom{n}{p} \frac{2-p}{(p+1)(p+2)}, \quad p = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{9}$$

Daraus ergibt sich für die Mittel die Formel:

$$\begin{aligned}
K_m^{n-p} &= \binom{n}{p} \frac{1}{(p+1)(p+2)} [p^2 \tilde{f}_{m,0} + 2p(\tilde{f}_{m,1} + \tilde{f}_{m,2}) + (2-p)\tilde{f}_{m,3}] \frac{h^n}{n!} \\
p &= 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{10}$$

Für die Abschätzung der Fehler werden noch die Taylorentwicklungen der wahren Werte für das Argument x_{m+1} bezüglich der Stelle

x_m benötigt werden. Diese ergeben sich unter Benützung der Abkürzungen [I], (13) und

$$D_1^3 f = D^3 f + (y' D f_y + y''' D f_{y'} + \dots + f D f_{y^{(n-2)}}) + y''' f_y + y^{IV} f_{y'} + \dots + f f_{y^{(n-3)}} \quad (11)$$

in folgender Weise:

$$\bar{v}_{m+1}^{n-p} = \sum_{\sigma=n-p}^{n-1} \binom{\sigma}{n-p} \bar{v}_m^\sigma + A + B \quad p = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

mit

$$A = \binom{n}{n-p} \bar{f}_m \frac{h^n}{n!} + \binom{n+1}{n-p} D \bar{f}_m \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \binom{n+2}{n-p} (D_1^2 \bar{f}_m + \bar{f}_{m, y^{(n-1)}} D \bar{f}_m) \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} \quad (13)$$

und

$$B = \binom{n+3}{n-p} f_{k\theta n-p}''' \frac{h^{n+3}}{(n+3)!}, \quad (14a)$$

bzw.

$$B = \binom{n+3}{n-p} [D_1^3 \bar{f}_m + \bar{f}_{m, y^{(n-1)}} D_1^2 \bar{f}_m + 3 D \bar{f}_{m, y^{(n-1)}} D \bar{f}_m + (\bar{f}_{m, y^{(n-1)}}^2 + \bar{f}_{m, y^{(n-2)}}) D \bar{f}_m] \frac{h^{n+3}}{(n+3)!} + \binom{n+4}{n-p} \bar{f}_{k\theta' n-p}^{IV} \frac{h^{n+4}}{(n+4)!}, \quad (14b)$$

wobei $f_{k\theta n-p}'''$ und $\bar{f}_{k\theta' n-p}^{IV}$ Funktionswerte der dritten und vierten Ableitung an Zwischenstellen bedeuten.

Die Grobwerte, die man erhalten würde, wenn man in (5) anstatt der verbesserten Werte die wahren Werte $\bar{v}_m^j$ zur Verfügung hätte, sollen durch einen darübergesetzten Haken gekennzeichnet werden. Für diese gelten dann die Formeln (5), wenn dort alle Grobwerte $\bar{v}_{m,i}^j$ durch die $\hat{v}_{m,i}^j$ ersetzt werden. Insbesondere ist

$$\hat{v}_{m,0}^j = \bar{v}_m^j \quad (15)$$

zu setzen.

4. Die Abschätzung des Fehlers.

Für die Fehler

$$\eta_{m+1}^j = v_{m+1}^j - \bar{v}_{m+1}^j \quad (16)$$

des Runge-Kutta-Verfahrens erhält man aus (7), (8) und (12) nach geeigneter Erweiterung die Formel:

$$\eta_{m+1}^{n-p} = \left[\sum_{\sigma=n-p}^{n-1} \binom{\sigma}{n-p} \eta_m^\sigma \right] + \left[\sum_{i=0}^3 \Gamma_i^{n-p} (\hat{f}_{m,i} - \hat{f}_{m,i}) \frac{h^n}{n!} \right] + \\ + \left[\sum_{i=0}^3 \Gamma_i^{n-p} \hat{f}_{m,i} \frac{h^n}{n!} - A - B \right] = \text{I} + \text{II} + \text{III}. \quad (17)$$

a) Abschätzung von I:

$$|I| \leq \sum_{\sigma=n-p}^{n-1} \binom{\sigma}{n-p} |\eta_m^\sigma| \quad (18)$$

b) Abschätzung von II:

Unter Verwendung der Abkürzung

$$\varepsilon_{m,i}^j = \hat{y}_{m,i}^{(j)} - y_{m,i}^{(j)} \quad (19)$$

folgt aus (3), (6) und (17):

$$|II| \leq K \frac{h^n}{n!} \sum_{\sigma=0}^3 \left[\Gamma_i^{n-p} \left| \sum_{\sigma=0}^{n-1} \varepsilon_{m,i}^\sigma \right| \right]. \quad (20)$$

Durch ähnliche Schlüsse, die in [I] von der Formel (24) zu (30) führten, kann man auch hier eine Abschätzung von $\sum_{\sigma=0}^{n-1} |\varepsilon_{m,i}^\sigma|$ gewinnen. Durch Anwendung von (3), (5), (6) und der analogen Formeln für die $\hat{v}_{m,i}^j$ gelangt man so unter Benützung der Abkürzungen

$$\xi_{m+1}^j = y_{m+1}^{(j)} - \bar{y}_{m+1}^{(j)} \quad (21)$$

zu den Abschätzungen:

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} |\varepsilon_{m,i}^\sigma| \leq \alpha_i \sum_{\sigma=0}^{n-1} |\xi_m^\sigma|, \quad (22)$$

wobei die α_i mit Hilfe der Funktion⁴

$$\alpha(h, k) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{h^\tau}{\tau!} + K \sum_{\tau=1}^n \frac{h^\tau}{\tau!} \quad (23)$$

folgendermaßen gegeben sind:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_1 &= \alpha(h/2, K) \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \frac{1}{2} h K (\alpha_1 - 1) \\ \alpha_3 &= \alpha(h, \alpha_2 K). \end{aligned} \quad (24)$$

⁴ Näherungsweise kann α durch $\bar{\alpha} = e^h + k(e^h - 1)$ ersetzt werden.

Durch Einsetzen von (22) in (20) ergibt sich schließlich:

$$|II| \leq K \beta_{n-p} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\sigma!}{n!} |\eta_m^\sigma| h^{n-\sigma} \quad (25)$$

mit

$$\beta_{n-p} = \sum_{i=0}^n |\Gamma_i^{n-p}| \alpha_i. \quad (26)$$

c) Abschätzung von III.

Setzt man in III die Taylorentwicklungen für die $\hat{f}_{m,i}^{(5)}$ und die Werte für A und B nach (13) und (14a), bzw. (14b) ein, so heben sich für $p = 2, 3, \dots, n$ die Glieder bis einschließlich der Ordnung $(n+2)$ und für $p = 1$ auch noch die der Ordnung $(n+3)$ weg und es bleibt:

$$III = \frac{h^{n+3}}{n! 3!} [1/8 \Gamma_1^{n-p} f_{m\vartheta_1}''' + 1/8 \Gamma_2^{n-p} f_{m\vartheta_2}''' + \Gamma_3^{n-p} f_{m\vartheta_3}'''] - \\ - \binom{n+3}{n-p} f_{k\vartheta n-p}''' \frac{h^{n+3}}{(n+3)!}, \quad p = 2, 3, \dots, n \quad (27a)$$

bzw.

$$III = \frac{h^{n+4}}{n! 4!} [1/16 \Gamma_1^{n-p} f_{m\vartheta_1}^{IV} + 1/16 \Gamma_2^{n-p} f_{m\vartheta_2}^{IV} + \Gamma_3^{n-p} f_{m\vartheta_3}^{IV}] - \\ - \binom{n+4}{n-p} f_{k\vartheta n-p}^{IV} \frac{h^{n+4}}{(n+4)!}, \quad p = 1 \quad (27b)$$

Daraus ergibt sich unter Benützung von (4) die Abschätzung:

$$|III| \leq J_{n-p} \quad p = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

mit

$$J_{n-p} = \begin{cases} \frac{49}{(n-1)! 2880} M_4 h^{n+4} & p = 1 \\ \frac{12 + (p+3)(p+2|2-p|)}{12 \cdot (n-p)! (p+3)!} M_3 h^{n+3} & p = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (29)$$

d) Gesamtaberschätzung:

Aus (17), (18), (25) und (28) erhält man nun die gesuchte Fehlerabschätzung:

$$|\eta_{m+1}^{n-p}| \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{n-p,\nu} |\eta_m^\nu| + J_{n-p} \quad p=1, 2, \dots, n \quad (30)$$

⁵ Man vergleiche [2], Formel (18).

mit

$$\begin{aligned} \gamma_{n-p, v} &= \binom{v}{n-p} + \frac{v!}{n!} K \beta_{n-p} h^{n-v} \\ p &= 1, 2, \dots, n \\ v &= 0, 1, \dots, n-1 \\ \beta_{n-p} &= \binom{n}{p} \frac{1}{(p+1)(p+2)} [p^2 + 2p(\alpha_1 + \alpha_2) + |2-p| \alpha_3] \end{aligned} \quad (31)$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durch (24) und die J_{n-p} durch (29) gegeben sind.

Damit ist eine rekursive Abschätzung der Fehler η_m^v möglich. Die Rekursionsformeln (30) haben den gleichen Aufbau wie die Fehlerformeln [I], (37) für das *Blaess*-Verfahren. Zur Aufstellung der Formeln werden die Größen h, K und M_3, M_4 benötigt. Zur Gewinnung einer independenten Fehlerabschätzung kann man genau so wie in Abschnitt 7 von [I] vorgehen. Werden also für die ganze Rechnung konstante Abschätzungen für K, M_3 und M_4 verwendet, so wird man dabei auf die Lösung eines Systemes von n Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten geführt. Die Rechnung kann aber auch mit Hilfe der Matrizenrechnung erfolgen.

5. Differentialgleichungen von der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}).$$

Das Fehlen der $(n-1)$ -ten Ableitung erspart die Berechnung der Grobwerte $\tilde{v}_{m2}^j$, da sich diese von den Grobwerten $\tilde{v}_{m1}^j$ nach (5) nur in $\tilde{v}_{m2}^{n-1}$ unterscheiden, welches in $\tilde{f}_{m,2}$ nicht vorkommt. Für die Fehlerabschätzung kann dann (24) durch

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha(h/2, K) \\ \alpha_3 &= \alpha(h, \alpha_1 K) \end{aligned} \quad (32)$$

ersetzt werden.

6. Formeln für Differentialgleichungen erster bis vierter Ordnung.

Für $n = 1, 2, 3$ und 4 sind nachfolgend die für die Fehlerabschätzung beim *Runge-Kutta*-Verfahren nach *Zurmühl* benötigten Formeln zusammengestellt. Die Rechenschemata können aus [4] entnommen werden.

a) Differentialgleichungen erster Ordnung.

 η_m Fehler von y_m .

Rekursionsformel für den Fehler:

$$|\eta_{m+1}| \leq \gamma_{00} |\eta_m| + J_0$$

$$\gamma_{00} = 1 + K h + \frac{1}{2} (K h)^2 + \frac{1}{6} (K h)^3 + \frac{1}{24} (K h)^4$$

$$J_0 = \frac{49}{2880} M_4 h^5.$$

Daraus ergibt sich sofort die independente Fehlerformel:

$$|\eta_m| \leq \frac{\gamma_{00}^m - 1}{\gamma_{00} - 1} \cdot \frac{49}{2880} M_4 h^5.$$

Ersetzt man γ_{00} durch den größeren Wert e^{Kh} , so erhält man die einfachere Abschätzung:

$$|\eta_m| \leq \frac{e^{mKh} - 1}{e^{Kh} - 1} \cdot \frac{49}{2880} M_4 h^5.$$

b) Differentialgleichungen zweiter Ordnung.⁶ η_m^0 Fehler von y_m η_m^1 Fehler von $y_m h$

$$\alpha_1 = 1 + \frac{h}{2} + K \left(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} \right)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{2} h K (\alpha_1 - 1)$$

$$\alpha_3 = 1 + h + K \alpha_2 \left(h + \frac{h^2}{2} \right)$$

$$\beta_0 = \frac{1 + (\alpha_1 + \alpha_2)}{3}$$

$$\beta_1 = \frac{1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3}{3}$$

Rekursionsformel für den Fehler:

$$|\eta_{m+1}^j| \leq \sum_{v=0}^1 \gamma_{jv}^1 |\eta_m^v| + J_j \quad j = 0, 1$$

⁶ Bezüglich der independenten Fehlerformeln vergleiche man [I], Abschnitt 9. Im Abschnitt 9 der vorliegenden Arbeit werden Formeln angegeben, die eine näherungsweise Berechnung der β_i unter Verwendung der Tabellen von [I] gestatten.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{00} &= 1 + K \beta_0 \frac{h^2}{2}, \quad \gamma_{01} = 1 + K \beta_0 \frac{h}{2} \\ \gamma_{10} &= K \beta_1 \frac{h^2}{2}, \quad \gamma_{11} = 1 + K \beta_1 \frac{h}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$J_0 = \frac{11}{720} M_3 h^5$$

$$J_1 = \frac{49}{2880} M_4 h^8$$

c) Differentialgleichungen dritter Ordnung⁶.

η_m^0 Fehler von y_m

η_m^1 Fehler von $y'_m h$

η_m^2 Fehler von $y''_m \frac{h^2}{2}$

$$\alpha_1 = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + K \left(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{48} \right)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{2} h K (\alpha_1 - 1)$$

$$\alpha_3 = 1 + h + \frac{h^2}{2} + K \alpha_2 \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} \right)$$

$$\beta_0 = \frac{9 + 6(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3}{20}$$

$$\beta_1 = 1 + (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\beta_2 = \frac{1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3}{3}$$

Rekursionsformel für den Fehler:

$$|\eta_{m+1}^j| \leq \sum_{\nu=0}^2 \gamma_{j\nu} |\eta_m^\nu| + J_j \quad j = 0, 1, 2$$

$$\gamma_{00} = 1 + K \beta_0 \frac{h^3}{6}, \quad \gamma_{01} = 1 + K \beta_0 \frac{h^2}{6}, \quad \gamma_{02} = 1 + K \beta_0 \frac{h}{3}$$

$$\gamma_{10} = K \beta_1 \frac{h^3}{6}, \quad \gamma_{11} = 1 + K \beta_1 \frac{h^2}{6}, \quad \gamma_{12} = 2 + K \beta_1 \frac{h}{3}$$

$$\gamma_{20} = K \beta_2 \frac{h^3}{6}, \quad \gamma_{21} = K \beta_2 \frac{h^2}{6}, \quad \gamma_{22} = 1 + K \beta_2 \frac{h}{3}$$

$$J_0 = \frac{7}{1440} M_3 h^6$$

$$J_1 = \frac{11}{720} M_3 h^6$$

$$J_2 = \frac{49}{5760} M_4 h^7$$

d) Differentialgleichungen vierter Ordnung.⁶

$$\begin{aligned} \eta_m^0 & \text{ Fehler von } y_m \\ \eta_m^1 & \text{ Fehler von } y'_m h \\ \eta_m^2 & \text{ Fehler von } y''_m \frac{h^2}{2} \\ \eta_m^3 & \text{ Fehler von } y'''_m \frac{h^3}{6} \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{48} + K \left(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{48} + \frac{h^4}{384} \right)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{2} h K (\alpha_1 - 1)$$

$$\alpha_3 = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + K \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} \right)$$

$$\beta_0 = \frac{8 + 4(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3}{15}$$

$$\beta_1 = \frac{9 + 6(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3}{5}$$

$$\beta_2 = 2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\beta_3 = \frac{2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_3}{3}$$

Rekursionsformel für den Fehler:

$$\begin{aligned} |\eta_{m+1}^j| & \leq \sum_{v=0}^8 \gamma_{jv} |\eta_m^v| + J_j \quad j = 0, 1, 2, 3 \\ \gamma_{00} &= 1 + K\beta_0 \frac{h^4}{24}, \gamma_{01} = 1 + K\beta_0 \frac{h^3}{24}, \gamma_{02} = 1 + K\beta_0 \frac{h^2}{12}, \gamma_{03} = 1 + K\beta_0 \frac{h}{4} \\ \gamma_{10} &= K\beta_1 \frac{h^4}{24}, \gamma_{11} = 1 + K\beta_1 \frac{h^3}{24}, \gamma_{12} = 2 + K\beta_1 \frac{h^2}{12}, \gamma_{13} = 3 + K\beta_1 \frac{h}{4} \end{aligned}$$

$$\gamma_{20} = K\beta_2 \frac{h^4}{24}, \gamma_{21} = K\beta_2 \frac{h^3}{24}, \gamma_{22} = 1 + K\beta_2 \frac{h^2}{12}, \gamma_{23} = 3 + K\beta_2 \frac{h}{4}$$

$$\gamma_{30} = K\beta_3 \frac{h^4}{24}, \gamma_{31} = K\beta_3 \frac{h^3}{24}, \gamma_{32} = K\beta_3 \frac{h^2}{12}, \gamma_{33} = 1 + K\beta_3 \frac{h}{4}$$

$$J_0 = \frac{17}{15120} M_3 h^7$$

$$J_1 = \frac{7}{1440} M_3 h^7$$

$$J_2 = \frac{11}{1440} M_3 h^7$$

$$J_3 = \frac{49}{17280} M_4 h^8$$

7. Vergleich mit den Fehlerabschätzungen von Bieberbach.

Bieberbach hat in [5] für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = f_\lambda(x, y_1, \dots, y_n) \quad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_\lambda(x_0) = y_{\lambda 0}$$

Formeln entwickelt, die bei Anwendung des *Runge-Kutta*-Verfahrens auf solche Systeme eine Abschätzung des Fehlers gestatten. Als Spezialfall ($\lambda = 1$) ergeben sich Formeln für die Differentialgleichung erster Ordnung⁷. Für Differentialgleichungen n -ter Ordnung, die durch Überführung in ein solches System gelöst werden, werden dann noch etwas günstigere Abschätzungen gewonnen⁸. Alle diese Formeln gelten aber lediglich für den ersten Schritt, beschränken sich also auf die Abschätzung der Integrationsfehler J_j . Zur Abschätzung werden andere Voraussetzungen — nämlich solche über die Maximalwerte der partiellen Ableitungen von f — als in der vorliegenden Arbeit verwendet. Es kann daher nur die Größenordnung der Integrationsfehler verglichen werden. Dabei zeigt es sich, daß dieser bei der von *Bieberbach* abgeschätzten indirekten Methode für y und die in Frage kommenden Ableitungen bei

⁷ [5], Formel (10).

⁸ [5], Formeln (14) bis (19).

Differentialgleichungen n -ter Ordnung von der Ordnung h^5 ist, während sich bei den direkten Formeln von *Zurmühl* für $y^{(j)}$ ($j = 0, 1, \dots, n-2$) ein Fehler von der Ordnung h^{n+3-j} und bei $y^{(n-1)}$ ein solcher von der Ordnung h^5 ergibt, wie man durch Umrechnen von (29) auf $y^{(j)}$ erkennt. Es ist also (bei $n \geq 3$) schon nach dem ersten Schritt beim direkten Verfahren der Fehler — außer für $y^{(n-2)}$ und $y^{(n-1)}$ — wesentlich geringer. Bei fortschreitender Rechnung wirkt sich aber die größere Genauigkeit der niedrigeren Ableitungen wesentlich auf die Genauigkeit der höheren aus! Bei der Forderung möglichst großer Genauigkeit ist also das direkte Verfahren dem indirekten unbedingt vorzuziehen.

Durch Integration der *Runge-Kutta*-Formel für die höchste Ableitung gewinnt *Bieberbach* einen Näherungswert für y , für den der Integrationsfehler von der Ordnung h^{n+4} — gegenüber einer Ordnung h^{n+3} bei *Zurmühl* — ist⁹. Die Anwendung dieser Methode verlangt jedoch die Ausführung einer $(n-1)$ -fachen Integration, die bei komplizierterem Bau der Funktion f umfangreiche zusätzliche Rechnung erfordern kann.

8. Runge-Kutta-Verfahren und Blaess-Verfahren.

Den beiden Verfahren liegt als gemeinsamer Grundgedanke die Ausnützung von Werten der Funktion f , die für zunächst grob ermittelte Argumente berechnet werden, zum möglichst genauen Abgleich der Taylorentwicklung der Lösungsfunktion zugrunde. Deshalb führt hier der beim Differenzenverfahren [1] eingeschlagene Weg, der zum Beispiel beim *Runge-Kutta*-Verfahren in Formel (17) eine andere Erweiterung unter Benützung der wahren Funktionswerte für die Argumente $x_{m,i}$ nahelegen würde, nicht zum Ziel. Dies würde nämlich höchstens einen Integrationsfehler von der Ordnung h^{n+2} ergeben¹⁰. Deshalb ist dieser Weg beim erweiterten *Blaess*'schen Ansatz und beim *Runge-Kutta*-Ansatz nicht gangbar. Die richtige Ermittlung der Größenordnung des Integrationsfehlers ist vielmehr nur durch Einführung der Größen $\hat{f}_{m,i}$ möglich.

Während beim *Runge-Kutta*-Verfahren die Grobwerte nur als Zwischenwerte Verwendung finden, sollen diese beim *Blaess*-Verfahren schon den Charakter von Näherungswerten tragen. Daraus erklären sich die Unterschiede in den beiden Ansätzen und die Bezeichnungen „Korrektur“, bzw. „Mittel“.

⁹ [5], Formel (20).

Für die Größenordnungen der Integrationsfehler ergeben sich:

- a) beim ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz: h^{n+2} für alle J_j
 b) beim erweiterten *Blaess*'schen Ansatz: h^{n+3} für alle J_j
 c) beim *Runge-Kutta*-Ansatz: h^{n+3} für $J_0, J_1, \dots, J_{n-2}$
 h^{n+4} für J_{n-1} .

Die Ansätze b) und c) liefern also fast die gleiche Größenordnung. Nur diese Ansätze sollen weiter untersucht werden. In beiden Fällen lauten die Rekursionsformeln:

$$|\eta_{m+1}^j| \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{j\nu} |\eta_m^\nu| + J_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

wobei die $\gamma_{j\nu}$ und J_j für b) durch [I], (48) und (50) bzw. für c) durch (31) und (29) gegeben sind. Dabei ist aber zu beachten, daß der Argumentabstand der verbesserten Werte beim *Runge-Kutta*-Verfahren h beträgt, beim *Blaess*-Verfahren aber $k \cdot h$ (k = Anzahl der Zwischenschritte). Daher bieten auch die Größen v_m^j für $j > 0$ zunächst keine Vergleichsmöglichkeit. Man muß erst die Formeln für das *Blaess*-Verfahren auf den gleichen Argumentabstand umrechnen, indem man h durch h/k ersetzt. Setzt man nun — was im folgenden zur Vereinfachung geschehen soll — $f_{y(n-1)} = 0$ voraus, so erkennt man, daß die Größen $\gamma_{j\nu}$, die für die Fortpflanzung des Fehlers verantwortlich sind, für beide Verfahren bis zu Gliedern zweiter Ordnung in h für $j = n-2, n-1$ genau und für $j \leq n-3$ annähernd genau übereinstimmen¹¹. Wesentliche Unterschiede treten hingegen bei den Integrationsfehlern J_j auf, die anschließend für $n = 2, 3, 4$ — auf den gleichen Argumentschritt umgerechnet — zusammengestellt sind:

		J_0	J_1	J_2	J_3
$n = 2$	Blaess	$0.0160 h^5 M_3$	$0.0160 h^5 M_3$		
	Runge-Kutta	$0.0150 h^5 M_3$	$0.0160 h^5 M_4$		
$n = 3$	Blaess	$0.0028 h^6 M_3$	$0.0160 h^6 M_3$	$0.0420 h^6 M_3$	
	Runge-Kutta	$0.0048 h^6 M_3$	$0.0150 h^6 M_3$	$0.0085 h^7 M_4$	
$n = 4$	Blaess	$0.0005 h^7 M_3$	$0.0028 h^7 M_3$	$0.0083 h^7 M_3$	$0.0140 h^7 M_3$
	Runge-Kutta	$0.0011 h^7 M_3$	$0.0048 h^7 M_3$	$0.0076 h^7 M_3$	$0.0028 h^8 M_4$

¹⁰ Da beim ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz der Integrationsfehler tatsächlich von der Ordnung h^{n+2} ist, würde man dort auch auf diese Weise vorgehen können.

¹¹ Die Abweichungen für $j \leq n-3$ ergeben sich dadurch, daß in (31) für die Abschätzung $(2-p)$ durch den Absolutbetrag ersetzt werden mußte. Das

Es zeigt sich also, daß die Integrationsfehler bei den Ableitungen niedriger Ordnung beim *Blaess*-Verfahren etwas geringer sind, bei den Ableitungen höherer Ordnung, insbesondere bei v_m^{n-1} , beim *Runge-Kutta*-Verfahren (zumindest, wenn M_4 nicht wesentlich größer ist als M_3) beträchtlich niedriger sind. Da gerade v_m^{n-1} den größten Einfluß auf die Fehlerfortpflanzung hat, werden sich beim *Runge-Kutta*-Verfahren wesentlich günstigere Verhältnisse gegenüber dem *Blaess*-Verfahren ergeben. Am stärksten wird sich dies bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung auswirken, bei steigender Ordnung immer weniger. Die beiden folgenden Beispiele einer Differentialgleichung zweiter und dritter Ordnung zeigen dies ganz deutlich¹²:

Beispiel 1: Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$y'' = -0.3 y' + 0.1 y$$

Anfangsbedingungen: $y(0) = 1, y'(0) = 0.5$

Schrittweiten: *Runge-Kutta*-Verfahren: $h = 0.2$

Blaess-Verfahren: $\bar{h} = 0.04$

Abschätzungen: $K = 0.3, L = 0, M' = 0.3, M_3 = 0.02, M_4 = 0.012$

Fehler von y :

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
Runge-Kutta	14.7	31	49	68	90	$\cdot 10^{-8}$
Blaess	13.5	93	244	474	789	$\cdot 10^{-8}$

Fehler von y' :

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
Runge-Kutta	6.5	14	22	32	43	$\cdot 10^{-8}$
Blaess	320.0	662	1035	1445	1902	$\cdot 10^{-6}$

Beispiel 2: Differentialgleichung dritter Ordnung.

$$y''' = y'$$

Anfangsbedingungen: $y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 1.$

Schrittweiten: *Runge-Kutta*-Verfahren: $h = 0.4$

Blaess-Verfahren: $h = 0.1$

Gesagte gilt nur solange, als die Größen $\bar{A}_i^j$ positiv sind, was in den hier in Betracht gezogenen Fällen $n = 2, 3, 4$ der Fall ist.

¹² Es wurden hier die Fehler für y und dessen Ableitungen $y^{(n)}$ selbst angegeben, um einen Vergleich der beiden Verfahren zu ermöglichen.

Abschätzungen: $K = 1, L = 0, M' = 0$

x	0.0—0.4	0.4—0.8	0.8—1.2	1.2—1.6	1.6—2.0
$M_3 = M_4$	1.5	2.3	3.4	5.0	7.4

Fehler von y :

x	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	
Runge-Kutta	3.0	20	68	184	454	10^{-5}
Blaess	1.7	43	236	821	2564	10^{-5}

Fehler von y' :

x	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	
Runge-Kutta	23.5	76	189	435	966	10^{-5}
Blaess	25.0	227	829	2904	6355	10^{-5}

Fehler von y'' :

	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	
Runge-Kutta	26	99	276	691	1621	10^{-5}
Blaess	320	1020	2520	5740	15060	10^{-5}

Während also bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung beim *Blaess*-Verfahren sich am Schlusse für y das Neunfache, für y' sogar das Fünfundvierzigfache des Fehlers beim *Runge-Kutta*-Verfahren ergibt, sind die entsprechenden Faktoren bei der Differentialgleichung dritter Ordnung 5.7, 6.6 und 9.3 für y , y' und y'' , obwohl die Argumentdifferenz hier doppelt so groß ist.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß das *Runge-Kutta*-Verfahren vorzuziehen sein wird, wenn die Rechnung über viele Schritte hinweg durchzuführen ist, besonders hohe Ansprüche an die Genauigkeit gestellt werden und die Größe M_4 nicht wesentlich höher ausfällt als M_3 .

Bei den vorhergehenden Betrachtungen wurde gleicher Argumentabstand für die verbesserten Werte vorausgesetzt. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß dann die Rechenarbeit beim *Blaess*-Verfahren etwas größer ist, da für $n \geq 3$ die Grobwerte für eine Argumentstelle mehr berechnet werden müssen. Außerdem fallen die Integrationsfehler beim *Blaess*-Verfahren größer aus, wenn die Bedingung $f_y(n-1) = 0$ nicht

erfüllt ist. Durch diese Annahmen wurde aber erst ein eingehender Vergleich der beiden Verfahren möglich.

9. Näherungsweise Berechnung der Größen β_j mit Hilfe von Tabellen.

Aus den Ausführungen des vorhergehenden Abschnittes geht hervor, daß die Größen β_j für *Blaess*- und *Runge-Kutta*-Verfahren in einer gewissen Beziehung zueinander stehen. Es liegt daher der Gedanke nahe, dies auszunützen, um diese Werte anstatt durch explizite Berechnung nach (24) und (31) mit Hilfe der Tabellen von [I] zu bestimmen. Bei Durchführung dieses Gedankenganges kommt man zu folgender einfacher Vorschrift zur angenäherten Bestimmung der Werte β_j für das *Runge-Kutta*-Verfahren:

Man bestimme die Größe α nach folgender Formel:

Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\alpha = 1 + \frac{h}{5} + K \left(\frac{h}{5} + \frac{h^2}{50} \right)$$

Differentialgleichungen 3. Ordnung:

$$\alpha = 1 + \frac{h}{4} + \frac{h^2}{32} + K \left(\frac{h}{4} + \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{384} \right)$$

Differentialgleichungen 4. Ordnung:

$$\alpha = 1 + \frac{h}{4} + \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{384} + K \left(\frac{h}{4} + \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{384} + \frac{h^4}{6144} \right)$$

Mit diesen Werten α als Eingang suche man in Tabelle 1, 2, bzw. 3 von [I] die Größen β_j für das *Blaess*-Verfahren auf (im folgenden mit β_j^{BL} bezeichnet). Dann ergeben sich die Größen β_j für das *Runge-Kutta*-Verfahren (mit β_j^{RK} bezeichnet) nach folgenden Formeln:

$$\text{Differentialgleichungen 2. Ordnung: } \beta_0^{RK} \approx \frac{1}{25} \beta_0^{BL}$$

$$\beta_1^{RK} \approx \frac{1}{5} \beta_1^{BL}$$

$$\text{Differentialgleichungen 3. Ordnung: } \beta_0^{RK} \approx \frac{11}{640} \beta_0^{BL}$$

$$\beta_1^{RK} \approx \frac{1}{16} \beta_1^{BL}$$

$$\beta_2^{RK} \approx \frac{1}{4} \beta_2^{BL}$$

$$\begin{aligned}\text{Differentialgleichungen 4. Ordnung: } \bar{\beta}_0^{RK} &\approx \frac{17}{4352} \beta_0^{BL} \\ \bar{\beta}_1^{RK} &\approx \frac{11}{640} \beta_1^{BL} \\ \beta_2^{RK} &\approx \frac{1}{16} \beta_2^{BL} \\ \beta_3^{RK} &\approx \frac{1}{4} \beta_3^{BL}\end{aligned}$$

Die überstrichenen Werte β_j^{RK} stellen wesentlich gröbere Annäherungen dar als die anderen¹¹.

10. Konvergenz des Runge-Kutta- und des Blaess-Verfahrens.

Aus den Rekursionsformeln für die Fehler (31) und [I], (37) bzw. (49) läßt sich sehr einfach die Konvergenz der beiden Näherungsverfahren für eine beliebige (endliche) Anzahl von Schritten zeigen, wenn man beachtet, daß für eine quadratische, n -zeilige Matrix $\mathfrak{A}$ mit positiven, der Abschätzung

$$a_{ik} < a$$

genügenden Elementen a_{ik} , für jede Potenz $\mathfrak{A}^m$ dieser Matrix gilt, daß deren Elemente $a_{ik}^{(m)}$ der Bedingung

$$a_{ik}^{(m)} < n^{m-1} a^m$$

genügen. Dann ergibt sich aus der Formel [I], (56) für die independente Fehlerschätzung (diese Formel ist ja für beide Verfahren brauchbar), daß für $h \rightarrow 0$ der Fehler für den ursprünglichen *Blaess*'schen Ansatz von der Ordnung h^{n+2} , für den erweiterten *Blaess*'schen Ansatz von der Ordnung h^{n+3} und beim *Runge-Kutta*-Verfahren für v_m^0 bis v_m^{n-2} ebenfalls von der Ordnung h^{n+3} , für v_m^{n-1} hingegen von der Ordnung h^{n+4} gegen Null strebt, womit gleichzeitig die Konvergenz dieser Verfahren bewiesen ist.

11. Schlußbemerkung¹³.

Im Gegensatz zu *Runge-Kutta*- und *Blaess*-Verfahren beruht das Differenzenschemaverfahren im wesentlichen auf der Verwendung von Quadraturformeln für Integrale von Funktionen einer Veränderlichen. Die darin auftretenden Funktionswerte f werden dann durch die vorher

¹³ Man vergleiche zu diesem Abschnitt [1] und [3].

berechneten Näherungswerte ersetzt und das Restglied wird weggelassen. Vor Anwendung des Verfahrens muß ein gewisses Anfangsstück mit Fehlerschranken bekannt sein. Zur Fehlerabschätzung hat man die exakten Formeln mit den Näherungsformeln zu vergleichen und die Lipschitzbedingung anzuwenden. Man erhält dann ein Rekursionsformelsystem, das außer den Fehlern der zuletzt berechneten Näherungswerte noch die Fehler für die p vorhergehenden Näherungswerte enthält, wenn das Anfangsstück aus $p + 1$ Näherungswerten besteht. Dieses Rekursionsformelsystem hat folgende Bauart:

$$|\eta_{m+1}^j| \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^p \gamma_{j\nu}^{\varrho} |\eta_{m-\varrho}^{\nu}| + J_j. \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

Die rekursive Fehlerabschätzung ist also mit viel mehr Rechenarbeit verbunden als bei *Blaess*- und *Runge-Kutta*-Verfahren. Während bei diesen die independente Fehlerabschätzung im wesentlichen die Lösung einer algebraischen Gleichung n -ten Grades erfordert, ist beim Differenzenverfahren der Grad der analogen Gleichung $n \cdot p$.

Da die Fehler des Differenzenschemaverfahrens wesentlich auch von den Fehlern des Anfangsstückes abhängen, läßt sich die Ordnung des Fehlers bei diesem Verfahren nicht allgemein angeben. Aus diesem Grunde wurde auf einen eingehenderen theoretischen Vergleich des Fehlers mit dem des *Runge-Kutta*- und *Blaess*-Verfahrens verzichtet.

Buchbesprechungen.

Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953. Band V: Logique-analyse philosophique-philosophie des mathématiques. 226 S. Band XIV: Volume complémentaire. 350 S. Amsterdam: North Holland Publishing Company. 1953. hfl. 8.50, geb. hfl. 11.—.

Band V und die auf diesen Band bezüglichen Ergänzungen im Band XIV sind wohl geeignet, einen Überblick über das zeitgenössische Schaffen der Logiker aller Richtungen zu geben. Es sind die philosophischen Aspekte ebenso vertreten wie die formale und mathematische Logik, Semantik, Wahrscheinlichkeitslogik, um nur einige Teilgebiete zu nennen. Im allgemeinen sind die Ausführungen der einzelnen Autoren ausführlich genug gehalten, um auch dem Nichtspezialisten ein Bild der auf dem Kongreß geleisteten Arbeit zu vermitteln.

L. Schmetterer, Wien.

Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Von *W. Lietzmann*. Fünfte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe I, Band 25.) Mit 9 Textabb., 60 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 2.40.

Gegenüber der vierten Auflage (Rezension in *Monatsh. Math.* 55, 347) sind nur geringe Zusätze gemacht worden. So berichtet der Verf., daß die 13., 14., 15., 16. und 17. Mersennesche Primzahl mit einer der modernen amerikanischen Rechenmaschinen berechnet wurden. Die 17. Primzahl hat 627 Stellen. Es ist anzunehmen, daß auch die fünfte Auflage bald vergriffen ist, da das Buch äußerst interessant und für jedermann verständlich geschrieben ist.

N. Hofreiter, Wien.

Principles of Mathematical Analysis. Von *W. Rudin*. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) IX, 227 S. New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Company. 1953. 37 s. 6 d.

Das ansprechende Buch ist für den Fortgeschrittenen als Einführung in die Analysis gedacht. Die Kenntnis der rationalen Zahlen wird vorausgesetzt; die irrationalen Zahlen werden als Dedekindsche Schnitte eingeführt. Es folgen die mengentheoretischen Grundlagen, Folgen und Reihen mit konstanten Gliedern, Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Recht zweckmäßig erscheint es, gleich den *Riemann-Stieltjesschen* Integralbegriff einzuführen, wie es hier geschieht. In dem gelungenen Kapitel über Folgen von Funktionen wird der *Weierstraßsche* Satz über die Abgeschlossenheit der Polynome im Raum der stetigen Funktionen bis zum *Stoneschen* Satz verallgemeinert, welcher allerdings etwas aus dem Rahmen der Darstellung fällt. Die Behandlung der Funktionen mehrerer Veränderlicher ist elegant, aber etwas knapp. Den Abschluß bildet eine Einführung in die abstrakte *Lebesguesche* Maßtheorie. Die Theorie im R_n wird nur zur Illustration herangezogen. Die moderne Darstellung vermag vieles anziehend zu gestalten, wirkt aber stellenweise etwas kurz. Der Begriff der Potenz mit reellem Exponenten, die inverse

Funktionen und ihre Differentiation u. a. sind nur in Übungsaufgaben erwähnt, deren das Buch nach jedem Kapitel etliche enthält. Schwierigere Aufgaben sind mit Anleitungen versehen. Nebenbei sei bemerkt, daß sich der Autor vor jeder geometrischen Veranschaulichung gehütet hat. Das Buch enthält keine Figur. Den fortgeschrittenen Studenten muß das Buch empfohlen werden.

L. Schmetterer, Wien.

Vorlesungen über höhere Mathematik. Von A. Duschek. Dritter Band: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. — Variationsrechnung. — Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Mit 107 Textabb., IX, 512 S. Wien: Springer-Verlag. 1953. S 220.—, geb. S 235.—; sfr. 37.40, geb. sfr. 39.80; \$ 8.70, geb. \$ 9.25; DM 36.50, geb. DM 38.80.

Nach einer längeren Pause ist endlich der begehrte dritte Band erschienen. Während die ersten beiden Bände im großen und ganzen nur das bringen, was tatsächlich an der Technischen Hochschule in Wien gelehrt wird, geht der dritte Band entschieden darüber hinaus. Er bietet in theoretischer Hinsicht wesentlich mehr. Dies hat den Vorteil, daß der Leser seine Kenntnisse vertiefen kann, aber andererseits den Nachteil, daß das Buch durch den großen Umfang naturnotwendig teurer werden mußte. Bereits im Titel sind die Hauptthemen zu ersehen. Klar ist, daß diese Gebiete für Physiker und Ingenieure wichtig sind. An sie wendet sich das Buch in erster Linie. Meiner Meinung nach hätte dann allerdings viel Theorie wegb bleiben können. Ich hätte dafür die Rechenmethoden und die Anwendungen stärker betont. Natürlich bin ich mir bewußt, daß meine Auffassung subjektiv ist. Das Buch ist allerdings auch für Mathematiker gedacht. Es stellt, was Stoffauswahl und Strenge betrifft, eine Kompromißlösung dar. Jeder muß zugeben, daß viel geboten wird. Was den Inhalt betrifft, so begnüge ich mich auf ein paar Schlagworte: Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen, Existenztheorem, graphische und numerische Lösungsmethoden, lineare Differentialgleichungen und Systeme von linearen Differentialgleichungen, partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung; Variationsprobleme, Extrema mehrfacher Integrale, Variationsprobleme mit Nebenbedingungen, allgemeine Koordinaten und allgemeine Räume, die *Jacobi-Hamiltonsche* Theorie; analytische Funktionen, konforme Abbildung, Integrale komplexer Funktionen, Reihen und Reihenentwicklungen, ganze Funktionen, meromorphe Funktionen, elliptische Funktionen und Integrale. — In methodischer Hinsicht ist es ein ausgezeichnetes Lehrbuch. Was auch in den Vorlesungen gebracht wird, wird mit einer gewissen Breite und Ausführlichkeit dargestellt. Das Übrige stellt an den Leser größere Anforderungen, aber niemals zu große. Zahlreiche Beispiele sind eingestreut. Es ist zu hoffen, daß der vierte Band im Jahre 1954 erscheint. Erst dann kann über die Stoffauswahl endgültiges gesagt werden.

N. Hofreiter, Wien.

Analytic Functions. Von S. Saks und A. Zygmund. Ins Englische übersetzt von E. J. Scott. (Monografie Matematyczne: Band XXVIII.) V, 451 S. Warschau-Breslau: Nakladem Polskiego Towarzystwa Matematycznego. 1952. \$ 6.50.

Dieses Buch ist ein Beweis dafür, daß man Funktionentheorie treiben und dennoch auf dem Boden einer bis ins Letzte exakten Darstellung verbleiben kann, wie man sie etwa in der Theorie der reellen Funktionen schon lange voraussetzt. Die Gefahr, sich hiebei in Einzelheiten zu verlieren, ist hier völlig vermieden worden. Man muß allerdings hinzufügen, daß es der durch ihre früheren

Werke in dieser Sammlung schon hinreichend bekannten Darstellungskunst der Verfasser bedurfte, um alles Wesentliche in lückenlosem Aufbau zu bieten und trotzdem das Buch nicht überdimensional werden zu lassen. Vorkenntnisse werden nicht benötigt, von einer gewissen Reife des mathematischen Denkens abgesehen. Die nötigen topologischen Hilfsmittel werden im Text entwickelt. Sehr bald führen die Verfasser den Begriff der normalen Familie ein. Die Potenzreihen werden erst fast 100 Seiten später gegeben. Ein ähnlicher Vorgang — bei anderer Zielsetzung — findet sich in der erst kürzlich erschienenen „Funktionen-theorie“ von *Caratheodory*. Übrigens sei hier erwähnt, daß die polnische Ausgabe des referierten Buches auf das Jahr 1938 zurückgeht. Zunächst wird der *Cauchy*-sche Integralsatz für ein Rechteck bewiesen, dann folgt das dritte Kapitel, welches auf der *Weierstraß*schen Theorie basiert. Das vierte Kapitel beginnt mit dem schönen Satz von *Runge* und benützt diesen, um den *Cauchy*schen Hauptsatz für einfach zusammenhängende Gebiete zu beweisen. Dieses Kapitel enthält auch einen Beweis des *Jordans*chen Kurvensatzes für geschlossene Polygone und eine analytische Kennzeichnung zusammenhängender Gebiete. Das nächste Kapitel gipfelt im *Riemann*schen Abbildungssatz, das folgende führt den Begriff der analytischen Fortsetzung und des analytischen Gebildes ein, streift die algebraischen Funktionen und definiert die *Riemann*sche Fläche im Sinne *Weyl*scher Ideen. Die Behandlung der ganzen Funktionen erfordert bei der Fülle der hier vorliegenden Einzelresultate eine besonders sorgfältige Auswahl. Die Verfasser haben es verstanden, Hauptergebnisse herauszustellen: Man findet hier selbstverständlich den großen und kleinen *Picard* (diesen mit der *Bloch*schen „elementaren“ Beweisanordnung) *Hadamard*s „formal factorisation“-Theorem und *Borel*s Theorem über die Nullstellen ganzer Funktionen. Das achte Kapitel ist den elliptischen Funktionen gewidmet und bevorzugt die *Weierstraß*sche Auffassung. Die Klarheit und Sauberkeit der Darstellung verdient angesichts mancher hier nicht immer befriedigender Darstellungen besonders hervorgehoben zu werden. Den Abschluß bildet eine Behandlung der *Gamma*funktion und *Riemann*schen Zetafunktion sowie der *Dirichlet*schen Reihen. Das Buch enthält zahlreiche Übungsaufgaben, welche ähnlich wie bei *Zygmund*s „Trigonometrical Series“ eine Fülle von schönen und wichtigen Ergänzungen beinhalten, in schwierigeren Fällen mit Anleitungen versehen sind und die Darstellung trefflich abrunden. Es ist außerordentlich zu begrüßen, daß die englische Übersetzung es ermöglicht hat, einen breiten Leserkreis mit dem ausgezeichneten Buch bekannt zu machen.

L. Schmetterer, Wien.

Conformal Mapping. Von *Z. Nehari*. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Company. 1952. 56 s. 6 d.

Gerade in der Theorie der konformen Abbildung besteht ein naturgemäßer Zusammenhang zwischen reiner Theorie und physikalischer Anwendung, da die Theorie oft von physikalisch-geometrischen Vorstellungen ausging und andererseits auch für den Praktiker zur richtigen Benützung der konformen Abbildung theoretische Kenntnisse unbedingt notwendig sind. Der Verfasser beabsichtigte somit, in diesem Buche beide Interessenrichtungen zu vereinigen, indem er zeigt, wie sich aus den theoretischen Entwicklungen auch für den Techniker, Physiker und anwendenden Mathematiker praktische Auflösungen von Abbildungsaufgaben ergeben. In den ersten vier Kapiteln werden die nötigen potentialtheoretischen und funktionentheoretischen Grundlagen entwickelt, indem der Verfasser nur die Kenntnis der Differential- und Integralrechnung voraussetzt. In Kapitel I wird die *Greensche* Funktion, die *Neumannsche* Funktion, der Begriff

des harmonischen Maßes und die *Hadamardsche* Formel für die Variation der *Greenschen* Funktion behandelt, während Kapitel II–IV eine unabhängige Darstellung einer Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen bringt: Analytische Funktionen, komplexe Integration, Normalfamilien. Kapitel V ist der Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche gewidmet: Lineare Transformation, *Schwarzsches* Lemma und deren Verallgemeinerungen, *Riemannscher* Abbildungssatz (Extremalaufgabe), Symmetrieprinzip, Polygon- und Kreisbogenbereiche, schlichte Funktionen, ausführlich ist die *Bergmannsche* Abbildungstheorie dargestellt. Kapitel VI beschäftigt sich mit speziellen Abbildungsfunktionen: Rationale Funktionen (Joukowski-Profil), Exponential- und trigonometrische Funktionen, Elliptische Funktionen, Abbildung von Bereichen, welche von Ellipsen- und Hyperbelbogen begrenzt werden, *Schwarzsche s-Funktion*, Elliptische Modulfunktion. Auf S. 323 oben ist vielleicht eine kleine Unklarheit, indem die etwas ungünstig mit $J(z)$ bezeichnete Modulfunktion 2. Stufe $k^2(z)$ bei Annäherung an einen irrationalen Punkt der reellen Achse keinen bestimmten Grenzwert annimmt, dies wird aber weiterhin nicht benützt. Kapitel VII enthält die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche: *Riemannsche* Modulen, kanonische Bereiche, Existenzsätze (Extremumaufgabe), *Bergmannscher* Kern, beschränkte Funktionen, *Szegoscher* Kern.

Die Darstellungsweise des Verfassers ist vorzüglich klar, alle Beweise sind durchwegs einfach durchgeführt, so daß das Buch, welches elementar beginnt und im letzten Kapitel bis zu neueren Untersuchungen vordringt, auch für den Studierenden, welcher weiter in die konforme Abbildung eindringen will, eine sehr gute Einführung darbietet. Das Buch enthält zirka 370 Übungsbeispiele, welche oft durchaus nicht elementar sind und auch manchmal im Text benützt werden.

E. Höfinger, Wien.

Introduction to Elliptic Functions with Applications. Von *F. Bowman*. Mit Textabb., 115 S. London: English Universities Press Ltd. 1953. Geb. 12 s. 6 d. net.

Das Buch ist jenen zu empfehlen, die eine kurze Einführung in die *Jacobischen* elliptischen Funktionen bekommen wollen und sich besonders für die Anwendungen interessieren. An Vorkenntnissen wird nur etwas Funktionentheorie vorausgesetzt. Neben den grundlegenden Eigenschaften der elliptischen Funktionen und der elliptischen Integrale wird die konforme Abbildung ausführlich behandelt. Hier ergeben sich viele Anwendungen auf Physik und Technik. Zuletzt werden auch einige hyperelliptische Funktionen betrachtet. Das Buch enthält sehr viele Aufgaben aus der reinen und angewandten Mathematik und am Schluß auch einige Tabellen.

N. Hofreiter, Wien.

Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung. Von *P. Funk, H. Sagan* und *F. Selig*. Mit 18 Textabb., VII, 106 S. Wien: F. Deuticke. 1953. S 50.—.

Das vorliegende Buch soll vor allem dem Techniker und dem technischen Physiker in das Arbeiten mit der Laplace-Transformation einführen. Nachdem die wichtigsten Formeln entwickelt werden, folgen gleich zahlreiche hübsche Anwendungen auf verschiedene praktische Probleme, wie z. B. NF-Trafo, Thomson-Kabel, Auto-Bremse. Zahlreiche Literaturhinweise und historische Erläuterungen erwecken im Leser sicherlich den Wunsch nach weiterem Studium und helfen so dem Praktiker, sich das mathematische Rüstzeug für seine Arbeit leichter zu erwerben. Der anregende Stil und die anschauliche Art der Darstellung werden sehr dazu beitragen, dem schönen Büchlein viele Freunde zu gewinnen.

K. Prachar, Wien.

Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics.

Von *St. Bergman* und *M. Schiffer*. („Pure and Applied Mathematics”. A Series of Monographs and Textbooks. Herausgegeben von P. A. Smith und S. Ellenberg: Band IV.) Mit 12 Textabb., XIII, 432 S. New York: Academic Press Inc., Publishers. 1953. Geb. \$ 8.—.

Das methodische Prinzip des vorliegenden Buches ist, die Behandlung der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung auf das Studium einiger weniger Fundamentallösungen zurückzuführen. Die zentrale Stellung nimmt somit die *Greensche* Funktion, die *Neumannsche* Funktion, *Robins' Funktion* und die verschiedenen Kernfunktionen ein. Das Buch gliedert sich in zwei Teile. In Teil A werden die Randwertprobleme in der Theorie der Wärmeleitung, Hydrodynamik, Elektro- und Magnetostatik und Elastizitätslehre mit Hilfe der Fundamentalfunktionen behandelt. Wichtig ist hierbei der Unterschied zwischen geometrischer und potentialtheoretischer Größe, welche erstere nicht von den Randbedingungen abhängt, im Gegensatz zur letzteren. Eine der Hauptaufgaben ist die Entwicklung von potentialtheoretischen Größen in geometrische Größen. Es wurde hier die neueste mathematische Literatur auf diesen Gebieten berücksichtigt, z. B. die Einführung der „ λ und Σ monogenetic-functions” nach *Bers-Gelbart* in der Behandlung der zweidimensionalen kompressiblen Flüssigkeiten in der Holographenebene, sowie die neuesten Arbeiten von *St. Bergman*, *M. Schiffer*, *Schiffer-Szegö*, *Bergmann-Schiffer*. In der Theorie der Elastizität wird auch eine entsprechende Behandlung der biharmonischen Gleichung durchgeführt.

In Teil B wird an Hand der zweidimensionalen Differentialgleichung $\Delta u = q(x, y)u$ die in den einzelnen Fällen mögliche Behandlung mittels der Kern- und Fundamentalfunktionen exakt mathematisch durchgeführt. Der wesentliche Unterschied zwischen der *Poincare-Fredholmschen* Theorie der Randwertaufgaben und der Kernmethode wurde von den Verfassern auf S. 334 auseinandergesetzt: In der Behandlung mittels Integralgleichungen wird jede besondere Randwertaufgabe in eine Integralgleichung transformiert, welche mit Hilfe einer *Neumannschen* Reihe gelöst wird. Die Kernmethode arbeitet hingegen im Inneren des Bereiches D . Falls der Kern $K(P, Q)$ konstruiert ist, können die Lösungen der ersten und zweiten Randwertaufgabe mit Hilfe einfacher Integrationen erhalten werden.

Es konnte leider nicht auf alle Einzelheiten des Buches eingegangen werden. Der von den beiden Forschern, welche in der Grundlegung der hier festgelegten Theorie den größten Anteil hatten, im Vorwort ausgesprochene Wunsch, daß dieses Buch zu weiteren Untersuchungen und Fortschritt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen führen möge, wird zweifellos erfüllt werden.

E. Höfinger, Wien.

Introduction to Applied Mathematics. Von *F. D. Murnaghan*. (Applied Mathematics Series.) IX, 389 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1948. \$ 5.50.

Die Vorlesungen, die der Verfasser hier veröffentlicht, sollen die mathematischen Hilfsmittel bereitstellen, welche der Physiker und Ingenieur benötigt. Nach einer Einführung in die Vektorrechnung und in die orthogonalen Funktionensysteme wird die Behandlung der Potentialgleichung auseinandergesetzt. Eingehend wird die Methode der reziproken Radien besprochen. Die Bessel- und Kugelfunktionen finden natürlich den ihnen gebührenden Raum. Der zentrale Teil des Buches wird von den Randwertaufgaben und den Integralgleichungen, welche nach der *Fredholmschen* Methode behandelt werden, gebildet. Dabei wird auch das *Rayleysche* Prinzip gebracht. Den Abschluß des Buches bildet ein

Abriß der formalen Variationsrechnung und der Laplace-Transformation. Die Darstellung ist sehr ausführlich. Das Buch ist daher nicht nur neben einer Vorlesung, sondern auch zum Selbststudium hervorragend geeignet.

E. Hlawka, Wien.

Praktische Mathematik. Eine Einführung mit besonderer Berücksichtigung von Statistik und Ausgleichsrechnung. Von *H. von Sanden*. Dritte, erweiterte und umgearbeitete Auflage. (Teubners Technische Leitfäden: Band 44.) Mit 25 Textabb., 128 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 3.20.

Die zweite Auflage wurde in dieser Zeitschrift im Band 56 auf S. 83 sehr lobend besprochen. Schon nach zwei Jahren war eine dritte Auflage notwendig. Sie unterscheidet sich von der zweiten Auflage im wesentlichen dadurch, daß der fünfte Abschnitt: „Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate“ umgearbeitet und erweitert wurde. Der „mittlere Fehler“ und das „Fortpflanzungsgesetz“ werden neu erklärt, wodurch die Darstellung an Strenge gewinnt. Neu hinzu gekommen sind zwei Paragraphen, und zwar über Alternativstatistik und über die Approximation von Funktionen durch Polynome. Ferner enthält die dritte Auflage mehrere neue Aufgaben. Es empfiehlt sich, auch die dritte Auflage zu erwerben, selbst wenn man schon das Buch in früherer Auflage besitzt.

N. Hofreiter, Wien.

Versicherungsmathematik. Von *F. Böhm*. II. Band. (Sammlung Göschen: Band 917/917a.) 205 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1953. DM 2.40.

Nachdem schon vor etwa 20 Jahren der erste Band neu aufgelegt wurde, ist nun auch der folgende Band in geänderter Gestalt wieder erschienen. Das Büchlein ist nunmehr neben einer Vorlesung zu einer sehr brauchbaren Studienunterlage geworden. Die trotz des schmalen Raumes erzielte Reichhaltigkeit läßt sich der schlagwortartigen Inhaltsangabe entnehmen: Zinstheorie, Sterblichkeitstheorie, Erlebensfall- und Todesfallversicherung, Prämienreserve, Prämienrückgewähr, Versicherung mehrerer Leben. Der zweite Teil behandelt die Grundlagen der Sozialversicherung und ist heute besonders bedeutungsvoll. Das Literaturverzeichnis ist recht umfassend und berücksichtigt die Neuerscheinungen. Eine Reihe von Tafeln zur Sozialversicherung beschließen das gelungene Bändchen.

L. Schmetterer, Wien.

Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Zusammengestellt von *U. Graf* und *H.-J. Henning*. Mit 9 Textabb., VI, 102 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 9.—.

Die Verf. haben sich der anerkennenswerten Mühe unterzogen, die wichtigsten Verteilungen und Schlußweisen der Statistik in knapper übersichtlicher Form zu erfassen, wobei die Bedürfnisse des Praktikers im Vordergrund stehen. Berücksichtigt sind die wichtigsten diskreten Verteilungen und die mit der Normalverteilung zusammenhängenden Prüfverteilungen, welche ausreichend tabuliert sind. Weiter die einfachsten Fälle der Varianzanalyse, Prüfung von Korrelationen und Regression, einfache, doppelte und *Waldsche* Sequential-Pläne für die Normal- und Binomialverteilung, Kontrollkarten u. a. für den angewandten Statistiker bedeutsame Dinge. Eine Unterlassung war es meines Erachtens, den Benützern nicht deutlich genug zu verstehen zu geben, daß hier nur ein (allerdings wichtiger) Teil der praktisch mehr oder weniger bedeutsamen Schlußweisen dargestellt wird. Der Praktiker neigt ja ohnedies meist stark dazu, ein einmal gebotenes Rezept ohneweiteres wieder anzuwenden. Diese Bemerkung soll jedoch in keiner Hinsicht die praktische Brauchbarkeit des Büchleins einschränken.

L. Schmetterer, Wien.

Nomographie. Von *A. S. Levens*. Mit 88 Textabb., 176 S. New York: J. Wiley & Sons. 1948. \$ 3.75.

Das Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser durch viele Jahre an verschiedenen Universitäten in USA. gehalten hat. Vom Leser werden nur sehr elementare mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. Da heute bildliche Darstellungen sehr beliebt sind, so ist es auch einleuchtend, daß die Nomographie vielfach angewandt wird. Der Hauptinhalt des Buches ist der Theorie und der Konstruktion von Leitertafeln (Fluchtlinientafeln) gewidmet. Diese erfreuen sich in der Praxis besonderer Beliebtheit. Da zum Verständnis der Leitertafeln die Beherrschung der Funktionsleitern gehört, so werden diese einleitend behandelt. Die Einteilung der Leitertafeln erfolgt gemäß den funktionalen Beziehungen. Der Verfasser beschränkt sich keineswegs auf funktionale Beziehungen mit drei Veränderlichen, sondern bringt auch mehrere Typen mit vier und noch mehr Veränderlichen. An der Spitze jedes Paragraphen steht etwas Theorie, dann folgen zahlreiche Beispiele, teils Zahlenbeispiele, vielfach Beispiele aus den Anwendungsgebieten, wie Physik, Technik und Industrie. Wertvoll sind die praktischen Anleitungen zum Entwerfen der Tafeln und die Ratschläge zu Vereinfachungen. Jedermann, der mit praktischer Nomographie zu tun hat, ist das Buch zu empfehlen.

N. Hofreiter, Wien.

Angewandte Nomographie. Von *F. Kießler*. Teil I: Mit Textabb. und Zahlentafeln, 138 S. Geb. DM 18.—. — Teil II: Mit Textabb. und Zahlentafeln, 176 S. Geb. DM 19.80. Essen: W. Girardet. 1952.

Der Verfasser hat die Bücher nach langjähriger praktischer Erfahrung geschrieben. Er weiß selbst sehr gut, wie man Nomogramme aufstellt; er weiß aber auch, wie man Schüler dazu anleitet. Die Bücher sind sehr breit geschrieben und in erster Linie für Ingenieure und Techniker geeignet. Überaus zahlreich sind die ausführlich durchgerechneten Beispiele aus der Industriepraxis. Der erste Band bringt Funktionsleitern, Leitertafeln und Sonderrechenstäbe für Funktionen mit einer oder zwei unabhängigen Veränderlichen. Band II enthält Netztafeln, Sonderrechenstäbe für Funktionen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen und seltener angewandte nomographische Verfahren. Für die einzelnen Typen werden stets die Schlüsselgleichungen aufgestellt und gezeigt, welche funktionalen Beziehungen sich damit darstellen lassen. Mit Hilfe des Dualitätsbegriffes wird der Zusammenhang zwischen Netztafeln und Leitertafeln erklärt. Da sich Nomogramme für ein und dieselbe Formel oft in verschiedener Weise aufstellen lassen, so sind des Verfassers Ratschläge wertvoll, welche Verfahren im Einzelfall am zweckmäßigsten sind.

N. Hofreiter, Wien.

Noordhoff's Wiskundige Tafels in 5 Decimalen. Herausgegeben von *P. Wijdenes*. VIII, 268 S. Groningen: P. Noordhoff. 1953. Geb. hfl. 8.75.

Das Buch enthält Tafeln für die Briggschen Logarithmen, die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, die Umwandlungen von Dezimalgraden in 60teilige und in Radiale, die natürlichen Logarithmen, die Exponentialfunktionen und die Hyperbelfunktionen, Primzahlen, Potenzen, Wurzeln und Reziproke, Faktorielle, Exponentialintegral, Integralsinus, Integralcosinus, Fehlerintegral und Besselfunktionen. Die Ausstattung ist vorbildlich. Wer zu rechnen hat, braucht solche Tafeln.

N. Hofreiter, Wien.

Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes. Von *A. Rohrberg*. Elfte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe I, Band 23.) Mit 15 Textabb., 64 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 2.50.

Die hohe Auflagenzahl macht jede Rezension überflüssig. Sie zeigt, wie beliebt das Buch ist. Es ist eine ausgezeichnete Gebrauchsanweisung, wie man praktisch mit logarithmischen Rechenstäben rechnet. Gegenüber der neunten Auflage, die in dieser Zeitschrift (Monatsh. Math. 56, 176) besprochen wurde, ist nur der 9. Abschnitt (Die logarithmische Teilung der Logarithmen) umgearbeitet worden.

N. Hofreiter, Wien.

Probleme der Entwicklung programmgesteuerter Rechengeräte und Integrieranlagen. Herausgegeben von H. Cremer. XIII, 86 S. Aachen: Mathematisches Institut der Technischen Hochschule. 1953.

Der Inhalt der Kapitel entspricht im wesentlichen Vorträgen, die beim Kolloquium an der Technischen Hochschule in Aachen im Juli 1952 gehalten wurden. Diese Tagung wurde veranstaltet, um eine Aussprache über die gegenwärtigen Entwicklungsprobleme von Großrechenanlagen durchzuführen. Es zeigte sich, daß sich die Rechengeräte nun auch in Deutschland in einer raschen Entwicklung befinden. Während die amerikanischen Maschinen zwar leistungsfähiger sind und insbesondere größere Rechengeschwindigkeit haben als die deutschen Geräte, sind diese weit billiger und somit für die Industrie leichter erschwingbar. Durch die neuen Rechengeräte sind viele Probleme der Forschung und Technik erst angreifbar geworden. Andererseits wurden viele Rechenmethoden der Mathematik umgestaltet. Es kommt vielfach auf die Zahl der Rechenschritte nicht an. Es gibt zwei große Gruppen von Großrechenanlagen: die Integrieranlagen und die programmgesteuerten Rechenautomaten. Die ersteren gestatten die Integration von Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die programmgesteuerten Rechenautomaten können grundsätzlich Rechnungen jeder Art und jeder erforderlichen Genauigkeit durchführen. Sie unterscheiden sich von den gewöhnlichen Rechenmaschinen zunächst durch ihre ungeheure Rechengeschwindigkeit. Rechnungen mit Milliarden von Rechenschritten können in verhältnismäßig kurzer Zeit durchgeführt werden. Eine große elektronische Rechenmaschine kann 2000 Rechner mit elektrischen Büromaschinen ersetzen. Die Rechenautomaten unterscheiden sich ferner durch die Eigenschaft, Rechnungen nach Erlangung von Zwischenresultaten nach anderen Methoden fortzusetzen. Industrie und Technik liefern mannigfaltige und zahlreiche Aufgaben, bei denen Großrechenanlagen mit Vorteil verwendet werden. Das Buch bringt zunächst ein ausführliches Vorwort von H. Cremer, sodann einen Aufsatz über die Entwicklung der Integromaten von H. Bückner aus Minden. Der Integromat ist eine kleine Integrieranlage. Es wird mit gröberer Genauigkeit gerechnet, aber dafür sind die Kosten viel geringer. F. J. Weyl vom Department of the Navy aus Washington berichtet über Aufbauprinzip, Arbeitsweise und Leistungsfähigkeit elektronischer programmgesteuerter Rechenautomaten. Er bezieht sich auf die rund 15 Hochgeschwindigkeits-Elektronen-Rechenmaschinen, die gegenwärtig in Amerika laufen. Die Anschaffungskosten sind enorm, die Geschwindigkeit ist allerdings auch kaum vorstellbar. Bedauerlich ist, daß die Maschinen sehr oft nicht funktionieren. Das Problem der Betriebssicherheit ist noch immer sehr schwerwiegend. L. Biermann von der Universität Göttingen berichtet über die Entwicklung elektronischer Rechenautomaten in Göttingen. K. Zuse aus Neukirchen sprach über programmgesteuerte Rechengeräte für industrielle Verwendung. Ziel in Deutschland ist, billige und betriebssichere Maschinen zu bauen. Nur solche Maschinen können die Industriefirmen kaufen und brauchen. Mögen auch dann die Geschwindigkeiten wesentlich niedriger und die Ergebnisse nicht so genau sein.

N. Hofreiter, Wien.

Griechische und anschauliche Geometrie. Von *W. Blaschke*. (Mathematische Einzelschriften: Band 1.) Mit 51 Textabb., 60 S. München: R. Oldenbourg. 1953.

Diese Schrift ist für einen weiten Kreis von Menschen geschrieben, die nur geistig interessiert zu sein brauchen und an geometrischen Fragestellungen Gefallen finden. Auch der Mathematiker findet das Buch außerordentlich amüsant geschrieben. Es ist reich an historischen Daten, speziell aus der griechischen Blütezeit und handelt insbesondere von den großen griechischen Geometern: Euklid, Archimedes und Apollonius. Der Verfasser zeigt, mit welchen Problemen sich die griechischen Mathematiker befaßt haben, welche Lösungen sie erzielt haben, und setzt auseinander, wie fruchtbar sich diese Probleme für spätere Jahrhunderte erwiesen haben. Das Buch trägt viel dazu bei, Interesse an der Mathematik zu erwecken und zu vertiefen. *N. Hofreiter, Wien.*

Einführung in die Analytische Geometrie. Von *G. Kowalewski* †. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 112 Textabb., VII, 364 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1953. DM 26.—.

Die erste Auflage erschien bereits 1910. Es ist staunenswert, daß nach mehr als 40 Jahren nochmals eine Auflage erfolgt. Die ersten drei Auflagen wurden sehr freundlich aufgenommen; ist doch das Buch ein vorzügliches Lehrbuch der Analytischen Geometrie und für Studierende breit und leicht verständlich geschrieben. An Vorkenntnissen wird nur lineare Algebra, und zwar Determinanten und etwas Matrizenrechnung verlangt. Es beginnt mit Betrachtungen über Strecken (wir sagen heute Vektoren), dann folgt die Geometrie auf der Geraden, dann die ebene Geometrie und schließlich die Analytische Geometrie im Raum. Diese wird (insbesondere Flächen 2. Grades) mit 70 Seiten relativ kurz behandelt im Vergleich mit der Analytischen Geometrie in der Ebene. Es ist anzunehmen, daß auch dieses nicht moderne Lehrbuch der Analytischen Geometrie noch viele Leser finden wird. *N. Hofreiter, Wien.*

Analytische Geometrie. Von *G. Pickert*. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Herausgegeben von E. Kamke und A. Kratzer: Reihe A, Band 24.) Mit 76 Textabb., X, 398 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1953. Geb. DM 26.—.

Das Buch bringt einen axiomatischen Aufbau der Analytischen Geometrie. Als Grundbegriffe werden „Punkt“ und „Vektor“ verwendet. Hierauf werden die Grundregeln (Axiome) aufgestellt. Aus ihnen werden die geometrischen Sätze durch rein logische Überlegungen abgeleitet. Schlüsse aus der Anschauung werden nicht gezogen. Zeichnungen dienen nur zur Illustration und niemals als Beweishilfen. Verwendet werden ferner die reellen und manchmal auch die komplexen Zahlen. Sorgfältig wird stets darauf hingewiesen, wann statt des Körpers der reellen Zahlen irgend ein Schiefkörper genommen werden kann. Dies ist nicht nur vom Standpunkt der abstrakten Algebra zu begrüßen; vielmehr hat die Betrachtung von Räumen über Schiefkörpern auch große Bedeutung für die geometrische Grundlagenforschung. Pädagogisch wertvoll sind die Betrachtungen, die zur Aufstellung der Axiome führen. Dadurch versteht der Leser die Bedeutung der Axiome viel besser. Die Ableitung der Beweise ist sehr klar. Das Begriffliche steht stets im Vordergrund, Rechnungen treten an Bedeutung zurück. Das Buch behandelt in drei großen Abschnitten die affine, die metrische und die projektive Geometrie im n -dimensionalen Raum. Das Buch ist inhaltlich sehr reich, was nur bei der guten Auswahl der Axiome und der eleganten Beweisführung möglich war. Es ist klar, daß manche interessante geometrische Dinge

nicht gebracht werden konnten. Die Aufgaben dienen weniger der Übung als der Fortbildung. Wenn auch in dem Buch keine Kenntnisse aus der Analytischen Geometrie vorausgesetzt werden, ja nicht einmal elementargeometrische Kenntnisse benutzt werden, so ist das Buch für den Anfänger zu schwer. Es ist kein einführendes Lehrbuch in die Analytische Geometrie — solche gibt es heute genug — sondern ein Buch für den Fortgeschrittenen und als solches eine wertvolle Ergänzung der Lehrbuchliteratur über Analytische Geometrie.

N. Hofreiter, Wien.

Das Delische Problem (Die Verdopplung des Würfels). Von W. Breidenbach. Dritte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe I, Band 68.) Mit 34 Textabb., 59 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 2.40.

In klarer und exakter Darstellung, ohne höhere Kenntnisse der Mathematik vom Leser vorauszusetzen, wird das berühmte Problem behandelt. Zunächst wird auseinander gesetzt, was exakte Lösungen, was Näherungslösungen sind und was man unter elementaren Konstruktionen (Konstruktionen mit Zirkel und Lineal) versteht. Sodann folgen historisch interessante exakte Lösungen, die aber nicht elementar sind, hierauf Näherungslösungen, die elementar sind. Zuletzt wird der Unmöglichkeitbeweis geführt. (Letzte Besprechung in dieser Zeitschrift, Monatsh. Math. 57, 96).

N. Hofreiter, Wien.

Topologie. Von C. Kuratowski. Band I. Dritte Auflage. XI, 450 S. — Band II. Zweite Auflage. VIII, 443 S. Warschau: Verlag der Polnischen Mathematikervereinigung. 1952.

Durch das Erscheinen des zweiten Bandes liegt nunmehr ein abgeschlossenes Ganzes vor, das in einem besprochen werden soll. Der Stoff ist in neun Kapitel eingeteilt, von denen die ersten drei den Inhalt des ersten Bandes bilden und inhaltlich sich größtenteils mit dem des früheren ersten Bandes decken. Wenn trotzdem eine erhebliche Vergrößerung des Umfangs stattgefunden hat (die erste Auflage von 1933 hatte nur 284 S.!), so ist dies zum geringsten Teil auf die übersichtliche Anordnung des Satzes, der Hauptsache nach darauf zurückzuführen, daß zahlreiche neuere Untersuchungen, vor allem der polnischen Mathematikerschule, neu aufgenommen und eingearbeitet wurden. So ist namentlich die Theorie der Borelschen, der analytischen und projektiven Mengen sowie der Baireschen Funktionen jetzt wesentlich eingehender dargestellt, die Dimensionstheorie ist durch einen Abschnitt über Simplexe und Polytope ergänzt, der bis zum Fixpunktsatz von Brouwer führt. Neu ist auch die Betrachtung der α -Transformationen, d. h. gewisser stetiger Transformationen metrischer Räume in Polytope, die zur Approximation beliebiger stetiger Transformationen dienen. Mit der Hervorhebung dieser Erweiterungen des Stoffes dürfte sich die Besprechung des ersten Bandes erledigen, da er ja in der früheren Form in den letzten 20 Jahren allgemeine Wertschätzung und Verbreitung gefunden hat.

Der zweite Band bringt im Kapitel 4 des Gesamtwerkes die Theorie der kompakten Räume. Hier wird auch die im ersten Band begonnene Dimensionstheorie weiter geführt und u. a. der Einbettungssatz von Menger und Nöbeling bewiesen. Kapitel 5 behandelt die zusammenhängenden Räume, besonderes Gewicht ist hier auf die Theorie der irreduziblen und der unzerlegbaren Kontinua gelegt. Gegenstand des Kapitel 6 sind die lokal zusammenhängenden Räume; es gipfelt in dem Beweis des Satzes, daß diese Räume mit den stetigen Kurven identisch sind. Bekanntlich haben zuerst H. Hahn und S. Mazurkiewicz dieses wichtige Theorem für Teilmengen des euklidischen Raumes bewiesen, die allgemeine Fassung stammt von W. Sierpinski. Hierauf folgt die allgemeine Theorie

der stetigen Kurven, unter Benützung des Begriffs der Ordnung eines Raumes in einem seiner Punkte. So lassen sich z. B. die Kurven als Kontinua charakterisieren, die in jedem ihrer Punkte die Ordnung 2 besitzen. Die Theorie der Bäume und der zyklischen Elemente beschließt das Kapitel. Im Kapitel 7 werden vor allem die Begriffe Homotopie der Funktionen und Zusammenziehbarkeit eines Raumes eingeführt und angewendet. Kapitel 8 hat gruppentheoretischen Charakter; nach einer allgemeinen Einleitung über kommutative Gruppen spielt vor allem die additive Gruppe der stetigen Funktionen mit ganzzahligen Funktionswerten, deren Beziehung zur Zusammenhangstheorie einleuchtet, eine wichtige Rolle, ferner zwei multiplikative Gruppen, die der stetigen Funktionen mit komplexen Werten vom Betrag 1 bzw. mit komplexen Werten $\neq 0$. Die beiden letzteren Gruppen gelangen vor allem im Schlußkapitel zur Anwendung, das von der Topologie der euklidischen Räume handelt. Diese wird allgemein soweit geführt, als es heute mit mengentheoretischen Methoden möglich ist, dann aber wird auf Grund von Untersuchungen von *Eilenberg* die ebene Topologie außerordentlich einfach und elegant behandelt. Außer den Haupttatsachen der ebenen Topologie werden noch eine Reihe von Sätzen über stetige komplexwertige Funktionen abgeleitet, welche zeigen, daß eine ganze Reihe von Sätzen über analytische Funktionen (*Weierstraßsche* Produktzerlegung, Satz von *Rouché*) wesentlich topologischen Charakter haben und daher einen sehr erweiterten Geltungsbereich besitzen.

Das Gesagte kann nur ein unzureichendes Bild von dem reichen Inhalt des Werkes eines der bedeutendsten Vertreter der polnischen Mathematikerschule geben, doch reicht es vielleicht hin, um zu zeigen, daß wir hier das Standardwerk der mengentheoretischen Topologie vor uns haben. *J. Radon*, Wien.

Entwicklung im Weltall. Von *H. Siedentopf*. (Abhandlungen und Berichte des Deutschen Museums: 21, 1953, Heft 1.) Mit 18 Abb., 48 S. München: R. Oldenbourg, 1953.

Dies ist eine gemeinverständliche Darstellung der Forschungen, welche sich mit der Entstehung und Entwicklung des Weltalls befassen. In sehr klarer Form werden die Grenzen solcher Überlegungen aufgezeigt, andererseits aber auch jene erstaunlichen Schlüsse genau besprochen, die man aus den bisherigen Beobachtungen unter Verwendung der allgemein gültigen physikalischen Gesetze gefolgert hat. Sehr interessant ist z. B. die Diskussion über die Verträglichkeit des Entropiesatzes mit der Weltentwicklung. Anhangsweise findet sich ein Bericht von *H. Auer* über den Zeißrefra' tor im Deutschen Museum. Zahlreiche gute Abbildungen, teilweise neuesten Datums, ergänzen die außerordentlich interessante Schrift. *K. Prachar*, Wien.

Einführung in die Kernphysik. Von *W. Riezler*. Fünfte Auflage. Mit 123 Abb., zahlreichen Tafeln, 332 S. München: R. Oldenbourg, 1953.

Das vorliegende Werk über die Physik der Atomkerne ist für einen sehr breiten Leserkreis bestimmt. Es soll möglichst voraussetzungslos einen Einblick in die sehr ausgedehnten Forschungen geben, die über den Aufbau der Atomkerne angestellt wurden. Mathematik wird im wesentlichen vermieden; dort, wo Formeln gebraucht werden, werden diese nur angeschrieben und ihre Bedeutung erklärt. Das Hauptgewicht hat der Verfasser auf eine klare und organische Darstellung gelegt, die insbesondere die experimentellen Grundlagen berücksichtigt. Nachdem im ersten Kapitel die Probleme und die historische Entwicklung der Kernphysik kurz und übersichtlich dargestellt werden, folgt eine Erklärung wichtiger Größen wie Ladung, Masse, Spin, magnetisches und elektri-

sches Moment. Kapitel III behandelt die Radioaktivität. Nun folgen sehr ausführlich die Kernreaktionen und die verschiedenen Methoden, mit denen man solche hervorrufen kann. Hier wird z. B. auch auf die Energieerzeugung im Weltall, insbesondere auf die Kosmogonie von *P. Jordan* kurz eingegangen. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit der Systematik des Aufbaus der Atomkerne. Sehr gründlich werden sodann die Methoden und Apparate zur Kernuntersuchung besprochen. Dies wird vor allem dem Studierenden wertvoll sein. Das Schlußkapitel berichtet über verschiedene Anwendungen der kernphysikalischen Methoden in anderen Wissensgebieten. Ein Fachlexikon, in dem auch die einfachsten Begriffe erklärt sind, wird sehr zur Verständlichkeit des Textes beitragen. Ein Anhang gibt eine Übersicht über einige der neuesten Entwicklungen.

Der Verfasser hat es verstanden, durch eine sehr glückliche Wahl des Stoffes und durch großes pädagogisches Geschick ein schönes und fesselndes Buch zu schreiben, das jeder gerne lesen wird, der die Physik der Atomkerne kennen lernen will.

K. Prachar, Wien.

Kosmische Strahlung. Vorträge, gehalten im Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, von L. Biermann, P. Budini, J. Buschmann, M. Deutschmann, E. Freese, K. Gottstein, R. Hagedorn, W. Heisenberg, F. G. Houtermans, H. Jahn, G. Lüders, R. Lüst, W. Macke, H. M. Mayer, P. Meyer, P. Molière, R. Oehmke, K. Ott, W. Paul, F. Sauter, A. Schlüter, K. Symanzik, M. Teucher, C. F. v. Weizsäcker, K. Wirtz, B. Zumino. Herausgegeben von *W. Heisenberg*. Zweite Auflage. Mit 256 Textabb. und 1 Tafel, VIII, 620 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. Geb. DM 78.—.

Bekanntlich ist die in stürmischer Entwicklung stehende Untersuchung der Höhenstrahlung als Kernphysik von Teilchen höchster Energie heute besonders wichtig; auch die Astrophysik erwartet wesentliche Aufschlüsse aus diesem Gebiet. Die vorliegende zweite Auflage ist also sehr zu begrüßen. Dies gilt um so mehr als man ebensogut von einem völlig neuen Buch sprechen könnte: der Aufbau konnte auf Grund der heutigen Kenntnisse dem Entstehungsmechanismus dieser verwinkelten Erscheinung angepaßt werden, der Umfang ist ungefähr verdoppelt. Nach einer einleitenden Übersicht wird in fünf Kapiteln über Entstehung der kosmischen Strahlung, die Nukleonen und π -Mesonenkomponente, die μ -Mesonen, die Lichtquanten-Elektronenkomponente und über das Zusammenspiel der Komponenten referiert. Der Anhang bringt die Erörterung von Einzelfragen und viele nützliche Tabellen und Diagramme. Die Darstellung beruht wieder auf Kolloquiumsvorträgen und zugehörigen Diskussionen. Tatsächlich sind die Beiträge der 26 Verfasser und die Gesichtspunkte der Teildisziplinen zu einem geschlossenen Ganzen verwoben. Von besonderem mathematischen Interesse sind die Ausführungen über Magneto-Hydrodynamik (Turbulenzfragen), die Teilchenbewegung im magnetischen Erdfeld und vor allem die in mehreren Abschnitten durchgeführte Theorie des stochastischen Prozesses der Kaskadenbildung. Bedeutungsvoll erscheint auch der *Heisenberg*-sche Ansatz zur Theorie der Explosionsschauer (Korrespondenz zur Stoßwellenausbreitung) im 2. Kapitel. Schließlich ist noch der sehr konzise Bericht über die Theorie der Mesonen (im Anhang) zu erwähnen.

P. Schiske, Wien.

The Theory of Homogeneous Turbulence. Von *G. K. Batchelor*. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.) Mit Textabb., XI, 197 S. Cambridge: At the University Press. 1953. Geb. 25 s. net.

Die statistische Theorie der homogenen Turbulenz hat in den letzten Jahren, dank der Untersuchungen von *G. I. Taylor*, *J. H. Burgers*, *T. von Kármán*,

A. N. Kolmogoroff, W. Heisenberg, C. F. von Weizsäcker und dem Verfasser bedeutende Fortschritte erzielt. Welche eminente theoretische und praktische Bedeutung jedes Ergebnis auf diesem schwierigen Gebiet besitzt, ist klar, doch war es für den, der auf diesem Gebiet nicht Fachmann ist, sondern nur diese Ergebnisse auf seinem Arbeitsgebiet anzuwenden wünschte, schwierig, die Bedeutung der erzielten Resultate und der ihnen zugrunde liegenden Annahmen richtig zu beurteilen, welche in den veröffentlichten Arbeiten nicht immer die gleichen sind. Diesem Mangel hilft nun dieses Buch, dessen Verfasser an der Entwicklung dieses Gebietes in hervorragender Weise beteiligt ist, ab. In konziser, aber klarer Weise wird der mathematische Apparat entwickelt, die verschiedenen Theorien kritisch besprochen und mit der Erfahrung fortlaufend verglichen. Ein Literaturverzeichnis beschließt dieses wertvolle Buch. Die Vorkenntnisse, welche das Studium des Buches erfordert, sind gering (es erfordert außer der selbstverständlichen Kenntnis der Diff.- und Integralrechnung, nur die Vertrautheit mit den Grundlagen der Hydrodynamik), da der Verfasser alles Benötigte entwickelt. So ist das Werk, welches das einzige auf diesem Gebiet ist, für einen weiten Interessentenkreis zugänglich. (Mathematiker, Physiker, Meteorologen, Astrophysiker, Ingenieure usw.) und für jeden, der dieses Gebiet anzuwenden hat, unentbehrlich. Die Ausstattung des Buches ist, wie bei diesem Verlag üblich, eine ausgezeichnete. *E. Hlawka, Wien.*

Aufgaben aus der Technischen Thermodynamik. Von *H. Richter*. 155 Aufgaben mit 55 Textabb. und 35 Zahlentafeln, VI, 122 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 9.—.

Die vorliegende Aufgabensammlung soll dem Studierenden und dem Praktiker helfen, konkrete Probleme der Thermodynamik zu behandeln. Insgesamt sind es 155 Aufgaben, die der Verfasser hier gesammelt hat und zwar aus folgenden Gebieten der Thermodynamik: Vollkommene Gase, nichtumkehrbare Vorgänge, Kreisprozesse vollkommener Gase, Zustandsänderung von Dämpfen, Kreisprozesse von Dämpfen, Zustandsänderungen feuchter Luft, Verbrennung. Die Problemstellung ist immer klar, die Auflösungen sind sehr ausführlich und übersichtlich angeordnet. Der Verfasser hat sich nicht gescheut, die Formeln, die den Berechnungen zugrunde liegen, immer wieder hinzuschreiben, um den Gang der Lösung verständlich zu machen. Auch die benötigten Konstanten werden immer wieder angegeben, so daß sich ein zeitraubendes Nachschlagen während des Rechnungsganges erübrigt.

Die Gründlichkeit und Ausführlichkeit, mit der hier alles vorgerechnet wird, wird dem Leser nicht nur praktische Kenntnisse vermitteln, sondern auch das theoretische Verständnis fördern, so daß das Buch jedem Interessenten wärmstens empfohlen werden kann. *K. Prachar, Wien.*

Schubert, H.: Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldsspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Neubearbeitet von *F. Fitting*. Elfte Auflage. Mit Abb., 271 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1953. Geb. DM 7.20.

Das Buch enthält eine große Anzahl von mathematischen Unterhaltungsaufgaben und wendet sich an alle, die dafür Interesse haben. Mehr als elementare algebraische Kenntnisse sind nicht notwendig. Die Darstellung ist sehr gut verständlich und vom mathematischen Standpunkt recht befriedigend. Der eine Leser hat seine Freude an magischen Quadraten oder am Boß-Puzzle-Spiel, ein anderer interessiert sich für die merkwürdigen Eigenschaften der ganzen

Zahlen, wieder ein anderer erfreut sich an Kunststücken und Geduldsspielen. Sie alle werden von dem Buch begeistert sein. *N. Hofreiter, Wien.*

Atti del quarto congresso dell'unione matematica Italiana (tenuto in Taormina, 25.—31. X. 1951). Band I: 324 S. — Band II: 684 S. Roma: Edizioni Cremonese della Casa Ed. Perelli. 1953. Lire 9.000.—.

Es war eine glückliche Idee, den vierten Kongreß der Unione Matematica Italiana in Sizilien abzuhalten. In den Händen von Prof. R. Calapso lag die mühevollen, von ihm meisterhaft geführte Vorbereitung des Kongresses. Aus Italien kamen nahezu alle Mathematiker. 39 Mathematiker aus dem Ausland, und zwar aus Belgien (3), Deutschland (8), Frankreich (8), Niederlande (1), Österreich (9), Polen (3), Schweden (1), Spanien (2) und USA. (4) durften der ehrenvollen Einladung folgen. Der Kongreß wurde in Messina eröffnet, in Taormina und Catania fortgesetzt und in Reggio Calabria beendet. Die Kongreßteilnehmer wohnten in dem bezaubernd schönen Taormina und fuhren mit Autobussen zu den Tagungsorten, aber auch auf den Ätna und nach Syrakus. Es wurden 19 große Vorträge von italienischen Mathematikern gehalten, die im Band I ausführlich wiedergegeben wurden. Ferner fanden 132 Sektionsvorträge statt, an denen sich auch die Gäste aus dem Auslande rege beteiligten. Die Vorträge gehörten in erster Linie der Analysis und der Geometrie, in zweiter Linie der angewandten Mathematik an. Sie hatten meist hohes Niveau und zeigten von den hervorragenden Leistungen der italienischen Mathematiker. Eine relativ ausführliche Wiedergabe der Sektionsvorträge erfolgte im Band II.

N. Hofreiter, Wien.

Technische Elektrodynamik

Von

Dr.-Ing., Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff**

Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa, Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel.

Erster Band: **Berechnung magnetischer Felder.** Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. 1952. Ganzleinen S 330.—, DM 66.—, \$ 15.70, sfr. 67.50.

„...Die Auswahl der durchgerechneten Aufgaben beweist aufs neue, daß eine der Fähigkeiten des Theoretikers darin bestehen muß, Probleme zu sehen, eine andere, sie in der richtigen Weise zu idealisieren. Mit diesen beiden Gaben vereinigt der Verfasser die weitere hohe Kunst, die notwendigen mathematischen Hilfsmitteln in meisterhafter Weise einzusetzen und zu handhaben. Für den theoretisch arbeitenden Ingenieur bildet das Buch eine reiche Fundgrube technisch wichtiger Aufgaben, die in der Konzeption, in der Verarbeitung und in den Ergebnissen in gleicher Weise großes Interesse verdienen. Das deutschsprachige, technisch-wissenschaftliche Schrifttum wird durch dieses Buch wesentlich und wertvoll bereichert. Auf die angekündigten 5 weiteren Bände darf man hiernach mit Recht gespannt sein.“

ETZ Elektrotechnische Zeitschrift

Zweiter Band: **Innere Elektronik**, Teil 1: Elektronik des Einzelelektrons. Teil 2: Elektronik von Kollektiven. *In Vorbereitung. Weitere Bände werden folgen.*

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften

Herausgegeben von

K. W. Fritz Kohlrausch, Graz, und **Hans Thirring**, Wien

Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz

Zuletzt erschien:

Band 8, Heft 2. (Ausgegeben im Dezember 1953.) Mit 60 Textabbildungen. 104 Seiten. 1953. S 120.—, DM 20.—, \$ 4.75, sfr. 20.50

Inhaltsverzeichnis:

Haefel, R. Zur Frage der Sichtbarmachung einzelner Moleküle im Feldelektronenmikroskop. — **Grümm, H.** Zur Dioptrik des Elektronen- und Ionenbündels mit kreisförmiger Hauptbahn. — **Blaha, F.** Über einige Wachstumsstrukturen von aus der Schmelze erstarrten Metallkristallen. — **Ledinegg, E.** und **P. Urban.** Über das magnetische Verhalten einer linearen Atomkette am absoluten Nullpunkt bei positivem Austauschintegral. — **Wagner, J.** Raman-Spektroskopischer Beitrag zur Struktur des Methylnitrits. — **Porod, G.** Die statistische Gestalt von Fadenmolekülen. II. Die allgemeine Lösung des speziellen Irrflugproblems. — **Cap, F.** Zur Kopplung eines Dirac-Feldes mit Bosonen vom Spin 1. — **Tomiser, J.** Eigendruckverbreiterung der Natrium-Resonanzlinien. — **Buchbesprechungen.**

Zu beziehen durch jede Buchhandlung